$\boxed{1}$ **（不定積分と定積分）**

次の不定積分，定積分を計算せよ。

(1) $\displaystyle\int \frac{(x+1)^2}{\sqrt[3]{x}}\,dx$

(2) $\displaystyle\int \frac{x^3-2x^2}{x+1}dx$

(3) $\displaystyle\int_1^2 x(x-1)^4\,dx$

(4) $\displaystyle\int_2^5 \frac{x}{\sqrt{x-1}}\,dx$

$\boxed{2}$ **（合成関数微分の逆）**

次の積分計算をせよ。

(1) $\displaystyle\int e^{3x+2}\,dx$ (2) $\displaystyle\int \sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)dx$ (3) $\displaystyle\int \frac{2}{\cos^2\dfrac{x}{2}}\,dx$

(4) $\displaystyle\int xe^{x^2}\,dx$ (5) $\displaystyle\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx$ (6) $\displaystyle\int \frac{1}{1+e^{-x}}\,dx$

(7) $\displaystyle\int \frac{\log x}{x}\,dx$ (8) $\displaystyle\int x\sqrt{x^2+1}\,dx$

$\boxed{3}$ **（三角関数の積分計算）**

次の積分計算をせよ。

(1) $\displaystyle\int \cos 5x \sin 3x \, dx$　(2) $\displaystyle\int \sin^3 x \cos x \, dx$　(3) $\displaystyle\int \sin^2 x \cos^2 x \, dx$

(4) $\displaystyle\int \tan x \, dx$　(5) $\displaystyle\int \tan^2 x \, dx$　(6) $\displaystyle\int \sin^3 x \, dx$

$\boxed{4}$ **（分数関数の積分計算）**

次の積分計算をせよ。

(1) $\displaystyle\int \frac{1}{4x^2 - 1} \, dx$

(2) $\displaystyle\int \frac{1}{(x+1)^2(x-1)^2} \, dx$

(3) $\displaystyle\int \frac{1}{\sin x} \, dx$

$\boxed{5}$ **（置換積分法）**

次の積分計算をせよ。

(1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\,dx$　(2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{2x}{(x+1)(x^2+1)}\,dx$　(3) $\displaystyle\int_3^8 \frac{\sqrt{x+1}}{x}\,dx$

(4) $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{\log x}{x^2+1}\,dx$　(5) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sin x+\cos x}\,dx$

$\boxed{6}$ **（部分積分法）**

部分積分法を用いて計算をせよ。

(1) $\displaystyle\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^2(x-\beta)^2\,dx$　(2) $\displaystyle\int x^2 e^{3x}\,dx$　(3) $\displaystyle\int \log x\,dx$

(4) $\displaystyle\int x\log(x-1)\,dx$　(5) $\displaystyle\int_0^\pi e^{-x}\sin x\,dx$

$\boxed{7}$ **（偶関数・奇関数の定積分，絶対値関数の定積分）**

(1) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}(x+1)^2\sin x\,dx$ を計算せよ。

(2) $f(t)=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}|\cos x-t\sin x|\,dx\ (t>0)$ を t で表せ。

$\boxed{8}$ **（定積分で表された関数）**

(1) $f(x)=\cos x+\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}}f(t)\cos t\,dt$ を求めよ。

(2) $f(x)=\displaystyle\int_{-x}^{x}\frac{\cos t}{1+e^t}\,dt$ の導関数 $f'(x)$ および $f(x)$ を求めよ。

(3) $\displaystyle\int_0^{x}tf(x-t)\,dt=a\sin x+b\cos x+2$ を満たす関数 $f(x)$ と定数 $a,\ b$ を求めよ。

$\boxed{9}$ **（面積）**

(1) 原点から曲線 $C : y = e^{\sqrt{x}}$ $(x \geqq 0)$ にひいた接線と曲線 C および y 軸で囲まれた部分の面積を求めよ。

(2) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{4 - x^2}\, dx$ を計算せよ。

$\boxed{10}$ **（媒介変数表示曲線で囲まれた領域の面積）**

(1) xy 平面上で $x = \sin\theta,\ y = \sin 2\theta$ $(\,0 \leqq \theta \leqq \pi\,)$ で表される曲線 C で囲まれる図形の面積を求めよ。

(2) 原点 O を中心とする半径 1 の円に糸がまきつけられていて，糸の端は点 A(1, 0) にあり，反時計回りにほどくことができる。糸をたわむことなくほどいていくとき，糸の端の点を P$(x,\ y)$，その糸と円の接点を T とし，動径 OT が OA から回転した角度を θ とする。$0 \leqq \theta \leqq \pi$ の範囲で変化するとき，点 P がえがく曲線と円および直線 $y = 1$ で囲まれる部分の面積を求めよ。

$\boxed{11}$ **（区分求積法）**

次の極限を求めよ。

(1) $I=\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}k\sqrt{n^2+k^2}$

(2) $J=\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left\{\frac{(2n)!}{n!}\right\}^{\frac{1}{n}}$

$\boxed{12}$ **（定積分と不等式）**

(1) $a\leqq x\leqq b$ で定義された連続関数 $f(x)$ に対して，

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right|\leqq\int_a^b|f(x)|\,dx$$

が成り立つことを導け。

(2) $x>0$ のとき，不等式 $x-\dfrac{x^2}{2}<\log(1+x)<x$ が成り立つことを示せ。

(3) 不等式 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-\sin x}\,dx<\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{1}{e}\right)$ が成り立つことを証明せよ。

$\boxed{13}$ **（立体の体積）**

(1) 底面積が S，高さが h である錐体の体積 V は $V=\dfrac{1}{3}Sh$ であることを示せ。

(2) 立体 $R=\left\{(x,\ y,\ z)\,\middle|\,\left(\sqrt{x^2+y^2}-2\right)^2+z^2\leqq 1\right\}$ の体積を求めよ。

(3) 円柱 A は中心軸が x 軸で，yz 平面による切り口は半径 1 の円(板)である。正四角柱 B は中心軸が z 軸で，xy 平面による切り口は一辺の長さが $2\sqrt{2}$ の正方形で，その正方形の対角線は x 軸と y 軸である。円柱 A と正四角柱 B の共通部分 K の体積を求めよ。

$\boxed{14}$ **（回転体の体積）**

(1) 原点から曲線 $y=e^x$ にひいた接線と曲線 $y=e^x$ および y 軸で囲まれた領域を R とする。R を x 軸のまわりに回転させてできる立体の体積 V_x を求めよ。また，R を y 軸のまわりに回転させてできる立体の体積 V_y を求めよ。

(2) xyz 空間内の平面 $y=1$ 上に中心 $(1,\ 1,\ 0)$，半径 1 の円板(円の周および内部)D がある。円板 D を z 軸のまわりに回転させてできる立体の体積 V を求めよ。

(3) $0\leqq x\leqq\pi$ において曲線 $y=\sin x$ と x 軸で囲まれた部分を y 軸のまわりに回転させてできる立体の体積 V を求めよ。

$\boxed{15}$ **（水の問題）**

(1) 曲線 $y=e^{x^2}$ を y 軸のまわりに回転してできる容器に深さが $h\,\mathrm{cm}$ になるまで水を入れたときの水の体積を $V\mathrm{cm}^3$ とするとき，V を h の式で表せ。

(2) この容器に毎秒 $2\,\mathrm{cm}^3$ の割合で水を注ぎ込むとき，水の体積が $\pi\,\mathrm{cm}^3$ となった瞬間の水面の上昇速度と，水面のひろがる速さを求めよ。

$\boxed{16}$ **（曲線の長さ）**

(1) 曲線 $x=\cos t+t\sin t,\ y=\sin t-t\cos t$ の $0\leqq t\leqq\pi$ の部分の長さを求めよ。

(2) 曲線 $y=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$ の $0\leqq x\leqq 2$ の部分の長さを求めよ。

(3) 放物線 $y=\dfrac{1}{2}x^2$ に沿って原点から点 $(2,\ 2)$ までの長さを求めよ。

$\boxed{17}$ **（定積分と漸化式）**

(1) $f_1(x) = x,\ \ f_{n+1}(x) = x + \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^1 e^{-x+y} f_n(y)\,dy\ \ (n = 1,\ 2,\ \cdots\cdots)$ で定義される関数 $f_n(x)$ を求めよ。

(2) $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x\,dx$ (n は自然数)を求めよ。

$\boxed{18}$ **（定積分と無限級数）**

$1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4} + \cdots\cdots + \dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$ を定積分で表すことにより，無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$ を求めよ。

$\boxed{1}$ **確認**：積分法はもともと微分法とは独立の概念で，本来は面積関数を求めることを指した。17 世紀にニュートンとライプニッツにより微分と積分とが裏返しの関係にあることが発見され，今日高校では微分法の逆演算と定義するのが一般的である。

$F'(x)=f(x)$ を満たすとき，関数 $F(x)$ を関数 $f(x)$ の**原始関数**という。ところが，導関数のときとは異なり，原始関数はただ一つというわけではない。$G(x)$ も $f(x)$ の原始関数であるとすれば，$G'(x)=F'(x)\big(=f(x)\big)$ と微分の線形性より

$$\{G(x)-F(x)\}'=0 \qquad \therefore\ G(x)-F(x)=C \ (\text{定数})$$

したがって，一つの関数に対する原始関数は無数にあるが，定数の差でしかないことがわかる。そこで，原始関数 $F(x)+C$ 全体を一つとみなしたものを**不定積分**と呼び，

$$\int f(x)dx=F(x)+C$$

と記号で表す。ここで，$f(x)$ を**被積分関数**，C を**積分定数**という。このように，集合の要素を総称するというとらえ方は，三角関数の一般角に似ている。

記号をそのまま流用することにして，関数 $f(x)$ が $a,\ b\ (a<b)$ を含む区間で定義された連続関数であるとき，$f(x)$ の a から b までの**定積分**を原始関数の差 $F(b)-F(a)$ で定義する。

$$\int_a^b f(x)dx=\Big[\,F(x)\,\Big]_a^b=F(b)-F(a)$$

ここで，定義ができるのか疑問が生じるが，別の原始関数 $G(x)=F(x)+C$ に対して

$$G(b)-G(a)=F(b)+C-\{F(a)+C\}=F(b)-F(a)$$

となるので，**原始関数のとり方によらない**ことがわかる。a から b までの定積分を求めることを a から b まで積分するというが，単に積分するというときは原始関数または不定積分を求めることを指す。

あとで確認する$\big(\to \boxed{11}\big)$ように，定積分の定義式はまさしく面積を表しているのであるが，理論に入る前に計算の準備をしておく必要がある。しばらくは，計算練習を兼ねて計算の技法について確認していこう。まずは，単純に微分してその関数になるものを見つける練習から行なう。

本ファイルでは，「基本関数」という言葉をしばしば用いる。これは正式な用語ではないが，「公式として原始関数の形がわかっている関数」のことを基本関数と呼ぶことで，説明内容を明確にしている。一般には，初等関数と呼ばれる。

解答：

(1)
$$\int\frac{(x+1)^2}{\sqrt[3]{x}}\,dx=\int\frac{x^2+2x+1}{x^{\frac{1}{3}}}\,dx=\int\left(x^{\frac{5}{3}}+2x^{\frac{2}{3}}+x^{-\frac{1}{3}}\right)dx$$
$$=\frac{3}{8}x^{\frac{8}{3}}+\frac{6}{5}x^{\frac{5}{3}}+\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}+C \quad (\text{答})$$

(C は積分定数)

(2) $\displaystyle\int \frac{x^3-2x^2}{x+1}\,dx = \int \frac{(x+1)(x^2-3x+3)-3}{x+1}\,dx$

$$= \int \left(x^2-3x+3-\frac{3}{x+1}\right)dx$$

$$= \frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+3x-3\log|x+1|+C \quad (答)$$

(C は積分定数)

(3) $\displaystyle\int_1^2 x(x-1)^4\,dx = \int_1^2 (x-1+1)(x-1)^4\,dx$

$$= \int_1^2 \{(x-1)^5+(x-1)^4\}\,dx$$

$$= \left[\frac{1}{6}(x-1)^6+\frac{1}{5}(x-1)^5\right]_1^2$$

$$= \frac{1}{6}+\frac{1}{5}$$

$$= \frac{11}{30} \quad (答)$$

(4) $\displaystyle\int_2^5 \frac{x}{\sqrt{x-1}}\,dx = \int_2^5 \frac{x-1+1}{\sqrt{x-1}}\,dx$

$$= \int_2^5 \left\{(x-1)^{\frac{1}{2}}+2\cdot\frac{1}{2\sqrt{x-1}}\right)dx$$

$$= \left[\frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}}+2\sqrt{x-1}\right]_2^5$$

$$= \frac{2}{3}(8-1)+2(2-1)$$

$$= \frac{20}{3} \quad (答)$$

$\boxed{2}$ **確認**：合成関数の微分の公式が，今度は積分の公式となる。

$$\int f'(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}f(ax+b)+C \quad (a \neq 0)$$

$$\int f'(g(x))g'(x)\,dx = f(g(x))+C$$

原理が単純なのに反して，具体的な関数で実際に計算してみると意外に手こずるので，ある程度の練習が必要である。この部分を鍛え，部分積分法(→ $\boxed{6}$)を乗り切ることが，積分計算の第 1 関門である。

この計算で置換積分法(→ $\boxed{5}$)を用いる人もいるが，微分の逆で済むものにわざわざ時間と労力のかかる技巧を持ち出すのは不自然である。そもそも置換積分は，本問のような合成関数の導関数を積分することの応用なのだから，本問のような計算を置換積分するのは本末転倒である。

解答：

(1) $\displaystyle\int e^{3x+2}\,dx = \frac{1}{3}e^{3x+2}+C$ (答)

(2) $\displaystyle\int \sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)dx = -\frac{1}{2}\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)+C$ (答)

(3) $\displaystyle\int \frac{2}{\cos^2\frac{x}{2}}\,dx = 2\times\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}\tan\frac{x}{2}+C = 4\tan\frac{x}{2}+C$ (答)

(4) $\displaystyle\int xe^{x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int e^{x^2}(x^2)'dx = \frac{1}{2}e^{x^2}+C$ (答)

(5) $\displaystyle\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx = \int \frac{(x^2+x+1)'}{x^2+x+1}\,dx = \log(x^2+x+1)+C$ (答)

(6) $\displaystyle\int \frac{1}{1+e^{-x}}\,dx = \int \frac{e^x}{e^x+1}\,dx = \int \frac{(e^x)'}{e^x+1}\,dx = \log(e^x+1)+C$ (答)

(7) $\displaystyle\int \frac{\log x}{x}\,dx = \int \log x(\log x)'dx = \frac{1}{2}(\log x)^2+C$ (答)

(8) $$\begin{aligned}\int x\sqrt{x^2+1}\,dx &= \frac{1}{2}\int (x^2+1)^{\frac{1}{2}}(x^2+1)'dx \\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}(x^2+1)^{\frac{3}{2}}+C \\ &= \frac{1}{3}(x^2+1)^{\frac{3}{2}}+C \quad \text{(答)}\end{aligned}$$

(いずれも C は積分定数)

$\boxed{3}$ **確認**：被積分関数が三角関数の場合は，

(i) 公式を用いて積を和に直す，または次数を下げて1次式にすることで，基本関数に帰着させる

(ii) 微分または積分を繰り返すと sin と cos が交互に現れる特殊性と公式 $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ により，合成関数の導関数の形を見抜く

という2つの技巧により，一般の関数とは別の計算方法ができる。ごく一部の例外を除いて，どちらの技巧を用いるかは式の形で完全に決まるので，その形を見抜く目を養うことが肝要である。その練習のため，本問では敢えて不規則に配列してある。

解答：

(1) $$\int \cos 5x \sin 3x\,dx = \frac{1}{2}\int \{\sin(5x+3x) - \sin(5x-3x)\}\,dx$$
$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{8}\cos 8x + \frac{1}{2}\cos 2x\right) + C \quad (答)$$

(2) $$\int \sin^3 x \cos x\,dx = \int \sin^3 x\,(\sin x)'\,dx = \frac{1}{4}\sin^4 x + C \quad (答)$$

(3) $$\int \sin^2 x \cos^2 x\,dx = \int \left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)^2 dx = \frac{1}{4}\int \frac{1-\cos 4x}{2}\,dx$$
$$= \frac{1}{8}\left(x - \frac{1}{4}\sin 4x\right) + C \quad (答)$$

(4) $$\int \tan x\,dx = -\int \frac{(\cos x)'}{\cos x}\,dx = -\log|\cos x| + C \quad (答)$$

(5) $$\int \tan^2 x\,dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right) dx = \tan x - x + C \quad (答)$$

(6) $$\int \sin^3 x\,dx = -\int \sin^2 x\,(-\sin x)\,dx = \int (\cos^2 x - 1)(\cos x)'\,dx$$
$$= \frac{1}{3}\cos^3 x - \cos x + C \quad (答)$$

(注)

1° 上の解答でカッコでくくった箇所は，被積分関数とその原始関数の関係を見やすくしたものであり，展開した式を答としてもよい。

2° (2)では，被積分関数を
$$\sin^3 x \cos x = \sin^2 x \cdot \sin x \cos x = \frac{1-\cos 2x}{2}\cdot\frac{\sin 2x}{2}$$
と変形しても積分できる。ただ，合成関数の微分の逆で計算できる場合は，そちらで計算した方が楽である。

3° (6)では，3倍角の公式より
$$\sin^3 x = \frac{1}{4}(3\sin x - \sin 3x)$$
と変形して積分することもできる。

4° (C は積分定数)を省略してある。これ以降も同様とする。

$\boxed{4}$ **確認**：分数関数の積分としては，分母が 1 次式である有理関数$\left(\to \boxed{1}(2)\right)$，および $\dfrac{f'(x)}{f(x)}$ または $\dfrac{f(\log x)}{x}$ の形のもの$\left(\to \boxed{2}(5)(6)(7)\right)$については既に確認した。
なお，$\displaystyle\int \frac{1}{x^2+a^2}\,dx$ は次の $\boxed{5}$ (2)で確認する。すべての分数関数の積分計算が実行できるわけではないので，それ以上一般の分数関数となると，以上に登場した分数に分けられるものに限られると考えてよい。

多項式 $F(x)$，$G(x)$ が互いに素で，$E(x)$ が $F(x)G(x)$ より次数が低い多項式であるとき，一般に (「式と証明」ファイルの「分数恒等式」で確認したように)

$$\frac{E(x)}{F(x)G(x)} = \frac{f(x)}{F(x)} + \frac{g(x)}{G(x)}$$

と部分分数展開できる。ただし，$f(x)$，$g(x)$ はそれぞれ $F(x)$，$G(x)$ より次数の低い多項式である。部分分数展開するには，上式の右辺の形に文字を置き，分母を払って係数比較を行なうのが一般的である。(1)のように，分母が定数差の 1 次式の積で分子が定数の場合，$\dfrac{1}{2x-1} - \dfrac{1}{2x+1}$ の定数倍になる事実を覚えておいて，アッサリ片付けてもよい。

解答：

(1)
$$\begin{aligned}\int \frac{1}{4x^2-1}\,dx &= \int \frac{1}{(2x-1)(2x+1)}\,dx \\ &= \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{2x-1} - \frac{1}{2x+1}\right)dx \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\log|2x-1| - \frac{1}{2}\log|2x+1|\right) + C \\ &= \frac{1}{4}\log\left|\frac{2x-1}{2x+1}\right| + C \quad \text{(答)}\end{aligned}$$

(2) $\dfrac{1}{(x+1)^2(x-1)^2} = \dfrac{ax+b}{(x+1)^2} + \dfrac{cx+d}{(x-1)^2}$ とおくと

$$\begin{aligned}1 &= (ax+b)(x-1)^2 + (cx+d)(x+1)^2 \\ &= (a+c)x^3 + (-2a+b+2c+d)x^2 + (a-2b+c+2d)x + b + d\end{aligned}$$

係数を比べて

$$a+c = -2a+b+2c+d = a-2b+c+2d = 0,\quad b+d = 1$$
$$\therefore\ a = \frac{1}{4},\ b = \frac{1}{2},\ c = -\frac{1}{4},\ d = \frac{1}{2}$$

上式に代入して

$$\begin{aligned}\frac{1}{(x+1)^2(x-1)^2} &= \frac{1}{4}\cdot\frac{x+2}{(x+1)^2} - \frac{1}{4}\cdot\frac{x-2}{(x-1)^2} \\ &= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2}\right) - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{(x-1)^2}\right)\end{aligned}$$

積分すると

$$\int \frac{1}{(x+1)^2(x-1)^2}\,dx = \frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{x+1}+\frac{1}{(x+1)^2}-\frac{1}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}\right)dx$$

$$= \frac{1}{4}\left(\log\left|\frac{x+1}{x-1}\right| - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1}\right) + C \quad \text{(答)}$$

(3) $$\int \frac{1}{\sin x}\,dx = \int \frac{\sin x}{\sin^2 x}\,dx = \int \frac{(\cos x)'}{\cos^2 x - 1}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{\cos x - 1} - \frac{1}{\cos x + 1}\right)(\cos x)'\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\log\left|\frac{\cos x - 1}{\cos x + 1}\right| + C$$

$$= \frac{1}{2}\log\frac{1-\cos x}{1+\cos x} + C$$

$$= \frac{1}{2}\log\frac{2\sin^2\dfrac{x}{2}}{2\cos^2\dfrac{x}{2}} + C$$

$$= \log\left|\tan\frac{x}{2}\right| + C \quad \text{(答)}$$

(注)　(3) は $\dfrac{1}{2}\log\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x} + C$ で止めてもよい。

$\boxed{5}$ **確認**：積分変数に別の関数を代入して積分する方法を**置換積分法**という。
$F'(x)=f(x)$ とし，関数 $x=g(t)$ は $\alpha \leqq t \leqq \beta$ で連続，$\alpha<t<\beta$ で微分可能な関数であり，x が a から b まで変化するとき t が α から β まで変化するとすれば，

$$\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a) = F(g(\beta))-F(g(\alpha)) = \int_\alpha^\beta f(g(x))g'(x)\,dx$$

実際に置換積分するとき，代入する関数は

- 適当なひとかたまりの式を一文字で置いたときの逆関数
- 被積分関数が表す曲線の媒介変数表示
- $\left(\text{三角関数の公式や}-x,\ \dfrac{1}{x}\text{のように，}\right)$ 被積分関数を保存するような関数

の中から見つけるのが一般的であるが，

$y=\sqrt{a^2-x^2}\ \left(x^2+y^2=a^2\right)$ の媒介変数表示が

$(x,\ y)=(a\cos\theta,\ a\sin\theta)$ または $(a\sin\theta,\ a\cos\theta)$

$y=\sqrt{x^2+a^2}\ \left(\dfrac{y^2}{a^2}-\dfrac{x^2}{a^2}=1\right)$ の媒介変数表示が $(x,\ y)=\left(a\tan\theta,\ \dfrac{1}{a\cos\theta}\right)$

であることは，とっさに出るようにしておきたい。

解答：
(1) $x=2\sin\theta$ と置換することにより

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\sqrt{4-4\sin^2\theta}}(2\sin\theta)'\,d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{2\cos\theta}\cdot 2\cos\theta\,d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{6}} d\theta = \frac{\pi}{6} \quad (\text{答})$$

(2) $\dfrac{2x}{(x+1)(x^2+1)} = \dfrac{a}{x+1}+\dfrac{bx+c}{x^2+1}$ とおくと

$$2x = a(x^2+1)+(bx+c)(x+1) = (a+b)x^2+(b+c)x+a+c$$

となるから，係数を比べて

$$a+b=0,\ b+c=2,\ a+c=0 \qquad \therefore\ a=-1,\ b=c=1$$

以上を定積分の式に代入すると

$$\int_0^1 \frac{2x}{(x+1)(x^2+1)}\,dx = \int_0^1 \left(-\frac{1}{x+1}+\frac{x}{x^2+1}+\frac{1}{x^2+1}\right)dx$$

ここで，

$$\int_0^1 \frac{1}{x+1}\,dx = \Big[\log(x+1)\Big]_0^1 = \log 2$$

$$\int_0^1 \frac{x}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{(x^2+1)'}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\Big[\log(x^2+1)\Big]_0^1 = \frac{1}{2}\log 2$$

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2+1}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\tan^2\theta+1}(\tan\theta)'\,d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta = \frac{\pi}{4}$$

であるから，求める定積分は

$$\int_0^1 \frac{2x}{(x+1)(x^2+1)}\,dx = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\log 2 \quad (答)$$

(3) $t>0$ においては

$$\sqrt{x+1} = t \iff x = t^2-1$$

であることに注意して，$x=t^2-1$ により置換すると

$$\begin{aligned}
\int_3^8 \frac{\sqrt{x+1}}{x}\,dx &= \int_2^3 \frac{t}{t^2-1}\cdot(t^2-1)'\,dt \\
&= \int_2^3 \frac{2t^2}{t^2-1}\,dt \\
&= \int_2^3 \left(2+\frac{2}{t^2-1}\right)dt \\
&= \int_2^3 \left(2+\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)dt \\
&= \left[2t+\log\frac{t-1}{t+1}\right]_2^3 = 2+\log\frac{3}{2} \quad (答)
\end{aligned}$$

(4) $t=\dfrac{1}{x}$ により置換すると

$$\begin{aligned}
\int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{\log x}{x^2+1}\,dx = \int_2^{\frac{1}{2}} \frac{\log\frac{1}{t}}{\left(\frac{1}{t}\right)^2+1}\left(\frac{1}{t}\right)'dt &= \int_2^{\frac{1}{2}} \frac{-\log t}{\frac{1}{t^2}+1}\left(-\frac{1}{t^2}\right)dt \\
&= -\int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{\log t}{t^2+1}\,dt
\end{aligned}$$

$$\therefore\ \int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{\log x}{x^2+1}\,dx = 0 \quad (答)$$

(5) $I=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}\,dx$，$J=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\sin x+\cos x}\,dx$ とおくと

$$I+J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x+\cos x}{\sin x+\cos x}\,dx = \frac{\pi}{2} \qquad \cdots\cdots ①$$

一方，$x=\dfrac{\pi}{2}-\theta$ により置換すると

$$I = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)+\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)'d\theta = J \qquad \cdots\cdots ②$$

①かつ②を解いて

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sin x+\cos x}\,dx = \frac{\pi}{4} \quad (答)$$

$\boxed{6}$ **確認**：被積分関数が積の形の場合は，(積は分かると書くくせに)そのままでは積分計算ができないので，一般には部分積分法を用いて基本関数に帰着させる。

部分積分法とは，積の微分法の逆により

$$\int f(x)g(x)\,dx = F(x)g(x) - \int F(x)g'(x)\,dx$$

とする計算方法であり，原理的には単純であるが，具体的な関数で積分計算ができるようになるには練習が必要である。実際の作業手順では，($F'(x)=f(x)$，$G'(x)=g(x)$ とするとき，)被積分関数 $f(x)g(x)$ に対して

$$\int F(x)g'(x)\,dx \text{ と } \int f'(x)G(x)\,dx$$

のどちらに帰着させると進展があるかを考え，計算の進行に沿って関数の変化

$$f(x)g(x) \longrightarrow F(x)g(x) \longrightarrow F(x)g'(x)$$

を追って行くことがポイントである。

被積分関数が多項式の場合，次数の上がり下がりで変化が容易にとらえられるので，(1)のような計算で公式の形をしっかり頭に叩きこむと良いだろう。また，(3)の結果：

$$\int \log x\,dx = x(\log x - 1) + C \quad (C\text{ は積分定数})$$

は公式として覚えておくこと。

解答：

(1)
$$\begin{aligned}\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^2(x-\beta)^2\,dx &= \left[\frac{1}{3}(x-\alpha)^3(x-\beta)^2\right]_\alpha^\beta - \frac{1}{3}\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^3\cdot 2(x-\beta)\,dx \\ &= 0 - \frac{2}{3}\left[\frac{1}{4}(x-\alpha)^4(x-\beta)\right]_\alpha^\beta + \frac{1}{6}\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^4\,dx \\ &= \frac{1}{6}\left[\frac{1}{5}(x-\alpha)^5\right]_\alpha^\beta \\ &= \frac{1}{30}(\beta-\alpha)^5 \quad \text{(答)}\end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned}\int x^2e^{3x}\,dx &= x^2\cdot\frac{1}{3}e^{3x} - \frac{2}{3}\int xe^{3x}\,dx \\ &= \frac{1}{3}x^2e^{3x} - \frac{2}{3}\left(x\cdot\frac{1}{3}e^{3x} - \frac{1}{3}\int 1\cdot e^{3x}\,dx\right) \\ &= \frac{1}{27}(9x^2-6x+2)e^{3x} + C \quad \text{(答)}\end{aligned}$$

(3)
$$\int \log x\,dx = x\cdot\log x - \int x\cdot\frac{1}{x}\,dx = x(\log x - 1) + C \quad \text{(答)}$$

(4)
$$\begin{aligned}\int x\log(x-1)\,dx &= \frac{1}{2}x^2\log(x-1)-\frac{1}{2}\int x^2\cdot\frac{1}{x-1}\,dx\\ &= \frac{1}{2}x^2\log(x-1)-\frac{1}{2}\int\left(x+1+\frac{1}{x-1}\right)dx\\ &= \frac{x^2-1}{2}\log(x-1)-\frac{1}{4}(x+1)^2+C \quad \text{(答)}\end{aligned}$$

(5) $I=\displaystyle\int_0^{\pi} e^{-x}\sin x\,dx,\quad J=\int_0^{\pi} e^{-x}\cos x\,dx$ とおく。

$$I=\Big[-e^{-x}\sin x\Big]_0^{\pi}+\int_0^{\pi} e^{-x}\cos x\,dx=J \qquad \cdots\cdots ①$$

$$J=\Big[-e^{-x}\cos x\Big]_0^{\pi}+\int_0^{\pi} e^{-x}(-\sin x)\,dx=e^{-\pi}+1-I \qquad \cdots\cdots ②$$

①かつ②を解いて

$$I=J=\frac{e^{-\pi}+1}{2} \quad \text{(答)}$$

$\boxed{7}$ **確認**：$f(-x) = f(x)$ を満たす関数 $f(x)$ を**偶関数**，$f(-x) = -f(x)$ を満たす関数を**奇関数**という。(一変数実関数の場合は)図形的には偶関数のグラフは y 軸に関して対称，奇関数のグラフは原点に関して対称となる。定積分が面積量を表す$\left(\to \boxed{9}\right)$ことより，次の公式が得られる。

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \begin{cases} 2\displaystyle\int_{0}^{a} f(x)\,dx & \bigl(f(x)\text{ が偶関数のとき}\bigr) \\ 0 & \bigl(f(x)\text{ が奇関数のとき}\bigr) \end{cases}$$

被積分関数に絶対値がかかっている場合は，絶対値をはずしてからでないと積分できない。絶対値をはずすには，絶対値の中の符号変化をとらえればよいので，「導関数の符号を調べる要領」がそのまま活用できる。

解答：

(1)
$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi}(x+1)^2 \sin x\,dx &= \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \sin x\,dx + \int_{-\pi}^{\pi} 2x\sin x\,dx + \int_{-\pi}^{\pi}\sin x\,dx \\
&= 0 + 2\int_{0}^{\pi} 2x\sin x\,dx + 0 \\
&= 4\Bigl[\,x\,(-\cos x)\Bigr]_{0}^{\pi} + 4\int_{0}^{\pi}\cos x\,dx \\
&= 4\pi \quad (\text{答})
\end{aligned}$$

(2) θ を $\cos\theta - t\sin\theta = 0$，$0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ を満たす定数とすれば，

$$\cos\theta = \frac{t}{\sqrt{t^2+1}},\quad \sin\theta = \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}$$

であり，$y = \cos x$ と $y = t\sin x$ のグラフの上下関係に注意すると

$$\begin{aligned}
f(t) &= \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} |\cos x - t\sin x|\,dx \\
&= \int_{0}^{\theta}(\cos x - t\sin x)\,dx + \int_{\theta}^{\frac{\pi}{2}}(t\sin x - \cos x)\,dx \\
&= \Bigl[\sin x + t\cos x\Bigr]_{0}^{\theta} + \Bigl[-t\cos x - \sin x\Bigr]_{\theta}^{\frac{\pi}{2}} \\
&= 2(\sin\theta + t\cos\theta) - t - 1 \\
&= 2\Bigl(\frac{1}{\sqrt{t^2+1}} + \frac{t^2}{\sqrt{t^2+1}}\Bigr) - t - 1 \\
&= 2\sqrt{t^2+1} - t - 1 \quad (\text{答})
\end{aligned}$$

$\boxed{8}$ **確認**：被積分関数が積分変数のみに依存する定積分の場合，特別な手法をとることができる。積分の上端と下端がともに定数の場合は

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(a) - F(b) = C \text{（定数）} \quad \bigl(F'(x) = f(x)\bigr)$$

であるから，定積分を k など**適当な文字で置いて式を簡略化**する。このあと積分計算をやり直すのは，直接には k を求めようとしているのではなく，勝手に 2ヶ所に置くことになった k が**矛盾を起こさないための条件を求める**ためである。

被積分関数が積分定数のみに依存し，積分の上端と下端が積分変数とは独立な微分可能な関数のとき，$F'(x) = f(x)$ とすると

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\int_{g(x)}^{h(x)} f(t)\,dt &= \frac{d}{dx}\bigl\{F(h(x)) - F(g(x))\bigr\} \\ &= f(h(x))h'(x) - f(g(x))g'(x)\end{aligned}$$

であり，特に $g(x) = a$，$h(x) = x + b$ （a，b は定数）のときは，

$$\boldsymbol{\frac{d}{dx}\int_a^{x+b} f(t)\,dt = f(x)}$$

が成り立つ。**被積分関数に上端または下端の関数の変数が含まれる場合は，定積分の係数として前に出すか，置換積分を行なってから公式を適用**する。

積分表示関数の場合は，初期条件を見落としがちなので注意する。例えば，

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt \iff F'(x) = f(x) \text{ かつ } F(a) = 0$$

である。

解答：

(1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} f(t)\cos t\,dt = k$ とおくと，

$$f(x) = \cos x + k \qquad \cdots\cdots \text{①}$$

定積分の式に代入して計算すると

$$\begin{aligned}k &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} (\cos t + k)\cos t\,dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \Bigl(\frac{1 + \cos 2t}{2} + k\cos t\Bigr)\,dt \\ &= \Bigl[\frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin 2t + k\sin t\Bigr]_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{8} + \frac{1}{2}k \qquad \cdots\cdots \text{②}\end{aligned}$$

②を解くと

$$k = \frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{4}$$

①に代入して，求める関数は

$$f(x) = \cos x + \frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{4} \quad \text{（答）}$$

(2) $f(x)=\displaystyle\int_{-x}^{x}\frac{\cos t}{1+e^t}\,dt$ を x で微分して

$$f'(x)=\frac{\cos x}{1+e^x}-\frac{\cos(-x)}{1+e^{-x}}(-x)'=\frac{\cos x}{1+e^x}+\frac{e^x\cos x}{e^x+1}=\cos x \quad (答)$$

両辺 x で積分して

$$f(x)=\sin x+C \quad (C \text{ は積分定数})$$

$f(0)=0$ より $C=0$ であるから,

$$f(x)=\sin x \quad (答)$$

(注) 「$f'(x)$ を求めよ」という問いがなければ，置換積分によって直接 $f(x)$ を求めることができる。$t=-u$ により置換すると

$$f(x)=\int_{x}^{-x}\frac{\cos(-u)}{1+e^{-u}}(-u)'\,du=\int_{-x}^{x}\frac{e^u\cos u}{e^u+1}\,du$$

となるから,

$$f(x)=\frac{1}{2}\int_{-x}^{x}\left(\frac{\cos t}{1+e^t}+\frac{e^t\cos t}{e^t+1}\right)dt=\frac{1}{2}\int_{-x}^{x}\cos t\,dt=\sin x$$

(3)
$$\int_0^x tf(x-t)\,dt=a\sin x+b\cos x+2 \qquad \cdots\cdots ①$$

$x-t=u$ ($t=x-u$) により置換すると

$$\int_0^x tf(x-t)\,dt=\int_x^0 (x-u)f(u)\,(x-u)'\,du$$
$$=x\int_0^x f(u)\,du-\int_0^x uf(u)\,du$$

となるから，両辺を x で 2 回微分すると

$$\frac{d}{dx}\int_0^x tf(x-t)\,dt=\int_0^x f(u)\,du+xf(x)-xf(x)=\int_0^x f(u)\,du \qquad \cdots\cdots ②$$
$$\frac{d^2}{dx^2}\int_0^x tf(x-t)\,dt=f(x) \qquad \cdots\cdots ③$$

①の両辺を 2 回微分すると，②，③より

$$\int_0^x f(u)\,du=a\cos x-b\sin x \qquad \cdots\cdots ④$$
$$f(x)=-a\sin x-b\cos x \qquad \cdots\cdots ⑤$$

①，④に $x=0$ を代入して

$$0=a\cdot 0+b\cdot 1+2,\quad 0=a\cdot 1-b\cdot 0$$
$$\therefore\ \ a=0,\ \ b=-2 \quad (答)$$

⑤に代入して

$$f(x)=2\cos x \quad (答)$$

$\boxed{9}$ **確認**：$a \leqq x \leqq b$ で定義された連続関数 $f(x)$ がこの範囲でつねに $f(x) \geqq 0$ ならば，曲線 $y = f(x)$ と 2 直線 $x = a,\ x = b$ および x 軸で囲まれた領域の面積 S は

$$S = \int_a^b f(x)\,dx$$

となる。微分の逆計算により面積が求まるのは，次のように示される。

まず，曲線 $y = f(x)$ と x 軸ではさまれた領域において，x 座標が a から x までの部分の面積を $S(x)$ とおく。$h > 0$ を十分小さくとって区間 $(x,\ x+h)$ には $f(x)$ の極値が存在しないようにすると，区間 $[\,x,\ x+h\,]$ では $f(x)$ は単調であるから，$[\,x,\ x+h\,]$ における微小面積を長方形の面積で評価すると

$$hf(x) \leqslant S(x+h) - S(x) \leqslant hf(x+h)$$

ハサミウチの原理と $f(x)$ の連続性より極限は収束して

$$S'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{S(x+h) - S(x)}{h} = f(x)$$

$$\therefore\ \ S = S(b) - S(a) = \int_a^b S'(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$

一般の領域の場合，$a \leqq x \leqq b$ で定義された連続関数 $f(x),\ g(x)$ が $a \leqq x \leqq b$ では $f(x) \leqq g(x)$ を満たすとき，領域 $D : a \leqq x \leqq b,\ \ g(x) \leqq y \leqq f(x)$ の面積 S は

$$S = \int_a^b \{f(x) - g(x)\}\,dx$$

これは，領域 D を y 軸方向に適当に $C > 0$ だけ平行移動させると

$$0 \leqq g(x) + C \leqq f(x) + C \quad (a \leqq x \leqq b)$$

とできるので，既に上で示したことを用いて

$$\begin{aligned} S &= \int_a^b \{f(x) + C\}\,dx - \int_a^b \{g(x) + C\}\,dx \\ &= \int_a^b \{f(x) + C - g(x) - C\}\,dx = \int_a^b \{f(x) - g(x)\}\,dx \end{aligned}$$

と導かれるからである。

積分の定義を微分の逆とすることで(練習が必要とは言え)計算はしやすいが，本来の面積量のイメージがつかみにくくなっている。上のような面積公式の証明が表立って出題されることは少ないが，数式と図形のイメージを結びつける意義は大きい。

解答：

(1) $x = t$ における C の接線の方程式は

$$y = \frac{1}{2\sqrt{t}} e^{\sqrt{t}} (x - t) + e^{\sqrt{t}}$$

この直線が原点を通るとすれば

$$0 = \frac{1}{2\sqrt{t}} e^{\sqrt{t}} (0 - t) + e^{\sqrt{t}} \qquad \therefore\ \ t = 4$$

よって，曲線 C と直線 $y=\dfrac{e^2}{4}x$ および y 軸で囲まれた図形の面積 S を求めると，

$$S=\int_0^4\left(e^{\sqrt{x}}-\frac{e^2}{4}x\right)dx$$

ここで，

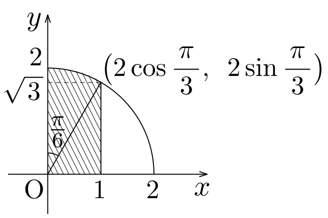
$$\begin{aligned}\int_0^4 e^{\sqrt{x}}\,dx=\int_0^2 e^{\sqrt{t^2}}(t^2)'\,dt&=2\int_0^2 te^t\,dt\\&=2\Big[te^t\Big]_0^2-2\int_0^2 e^t\,dt\\&=4e^2-2\Big[e^t\Big]_0^2\\&=2e^2+2\end{aligned}$$

$$\int_0^4\frac{e^2}{4}x\,dx=\frac{e^2}{4}\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^4=2e^2$$

であるから，求める面積 S は

$$S=2\quad(答)$$

(2) $\displaystyle\int_0^1\sqrt{4-x^2}\,dx$ は次図の斜線部分の面積を表す。



扇形と直角三角形の面積和として

$$\int_0^1\sqrt{4-x^2}\,dx=\frac{1}{2}\cdot 2^2\cdot\frac{\pi}{6}+\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\sqrt{3}=\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}\quad(答)$$

$\boxed{10}$ **確認**：媒介変数表示曲線で囲まれる領域の面積を考える場合，無理にでも媒介変数が消去できて x, y だけの表示にできるなら，x, y の式に直してから計算する方が見通しがよい。

媒介変数が消去できない場合は，(必要ならいくつかの区間に分けて)陰関数を $f(x)$ または $f(y)$ とおいて，まず x, y の式として面積を定積分で表す。この場合，$f(x)$ もしくは $f(y)$ は具体的には式に表せないので，置換積分と解釈して媒介変数を積分変数として計算する。

解答：

(1) 曲線 $C : x = \sin\theta,\ \ y = \sin 2\theta\ (\,0 \leqq \theta \leqq \pi\,)$ は θ を消去して表すと

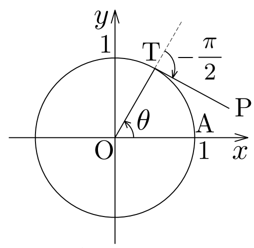
$$y = \pm\, 2x\sqrt{1 - x^2} \quad (\,0 \leqq x \leqq 1\,)$$

となるから，求める面積を S とすると

$$S = 2\int_0^1 2x\sqrt{1 - x^2}\, dx = -2\int_0^1 (1 - x^2)^{\frac{1}{2}}(1 - x^2)'\, dx$$

$$= -2\left[\,\frac{2}{3}(1 - x^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{4}{3} \quad \text{(答)}$$

(2) θ の定め方と三角関数の定義より



$$\overrightarrow{\mathrm{OT}} = (\cos\theta,\ \sin\theta)$$

$\overrightarrow{\mathrm{TP}}$ と同じ向きの単位ベクトルは，$\overrightarrow{\mathrm{OT}}$ を始点のまわりに $-\dfrac{\pi}{2}$ だけ回転させたものであるから，

$$\frac{\overrightarrow{\mathrm{TP}}}{|\overrightarrow{\mathrm{TP}}|} = \Bigl(\cos\bigl(\theta - \frac{\pi}{2}\bigr),\ \sin\bigl(\theta - \frac{\pi}{2}\bigr)\Bigr) = (\sin\theta,\ -\cos\theta)$$

$|\overrightarrow{\mathrm{TP}}|$ は点 A から点 T が動いた長さ θ に等しいから，

$$\overrightarrow{\mathrm{TP}} = \theta(\sin\theta,\ -\cos\theta)$$

$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{OT}} + \overrightarrow{\mathrm{TP}}$ であるから，$\mathrm{P}(x,\ y)$ とすると

$$x = \cos\theta + \theta\sin\theta,\quad y = \sin\theta - \theta\cos\theta \quad (\,0 \leqq \theta \leqq \pi\,)$$

この曲線と円 $x^2 + y^2 = 1$ および直線 $y = 1$ で囲まれる部分は，θ が $0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ の範囲を変化するとき線分 TP が通過してできる領域である。$0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ で

$$\frac{dy}{d\theta} = \cos\theta - \cos\theta - \theta(-\sin\theta) = \theta\sin\theta > 0$$

であるから，関数 $y = \sin\theta - \theta\cos\theta$ は逆関数をもつ。よって，この逆関数 $y \mapsto \theta$ と関数 $x = \cos\theta + \theta\sin\theta$ との合成関数として，題意の曲線の $0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ の部分はある $x = f(y)$ のグラフとみなせる。

求める面積を S とすると

$$
\begin{aligned}
S &= \int_0^1 f(y)\,dy - \frac{\pi}{4} \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos\theta + \theta\sin\theta)\,(\sin\theta - \theta\cos\theta)'\,d\theta - \frac{\pi}{4} \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos\theta + \theta\sin\theta)\,\theta\sin\theta\,d\theta - \frac{\pi}{4} \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Big(\frac{1}{2}\theta\sin 2\theta + \theta^2\cdot\frac{1-\cos 2\theta}{2}\Big)\,d\theta - \frac{\pi}{4} \\
&= \frac{1}{2}\Big[-\frac{1}{2}\theta\cos 2\theta + \frac{1}{4}\sin 2\theta + \frac{1}{3}\theta^3 \\
&\qquad\quad -\frac{1}{2}\theta^2\sin 2\theta - \frac{1}{2}\theta\cos 2\theta + \frac{1}{4}\sin 2\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{\pi}{4} \\
&= \frac{1}{2}\Big(\frac{\pi}{4} + 0 + \frac{\pi^3}{24} - 0 + \frac{\pi}{4} + 0\Big) - \frac{\pi}{4} \\
&= \frac{\pi^3}{48} \quad (\text{答})
\end{aligned}
$$

（**別解**） θ の微小変化 $\Delta\theta$ に対して，線分 TP が通過する領域は中心角 $\Delta\theta$ 半径 θ の円で近似できる。線分 TP が通過する領域の面積を $S(\theta)$，$\Delta\theta$ に対する微小面積を ΔS とすると

$$
\Delta S \fallingdotseq \frac{1}{2}\theta^2\,\Delta\theta, \quad S'(\theta) = \lim_{\Delta\theta\to 0}\frac{\Delta S}{\Delta\theta} = \frac{1}{2}\theta^2
$$

であるから，求める面積は

$$
S\Big(\frac{\pi}{2}\Big) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}\theta^2\,d\theta = \frac{1}{2}\Big[\frac{1}{3}\theta^3\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^3}{48} \quad (\text{答})
$$

$\boxed{11}$ **確認**：微分の逆演算(である積分)が面積を表すことを$\boxed{9}$で示したが，このことは同時に連続関数のグラフで囲まれた領域の面積量は確定することをも示している。したがって，区間$a \leqq x \leqq b$をn等分したときの長方形の面積和を表す式は$n \to \infty$のとき収束して

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{b-a}{n}f\Big(a+(b-a)\frac{k}{n}\Big)=\int_a^b f(x)\,dx$$

となる。同様に

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{b-a}{n}f\Big(a+(b-a)\frac{k}{n}\Big)=\int_a^b f(x)\,dx$$

も成り立つ。

実際の計算式では難しく見えてしまうので，長方形の面積和の図をかいて(下の解答では省略するが)式の形を見極めればよい。積や累乗の式で表されている場合は，対数をとって乗法的議論を加法的議論に移すことがポイントである。

解答：

(1)
$$\begin{aligned}I=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}k\sqrt{n^2+k^2}\ &=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\cdot\frac{k}{n}\sqrt{1+\Big(\frac{k}{n}\Big)^2}\\&=\int_0^1 x\sqrt{1+x^2}\,dx\\&=\frac{1}{2}\int_0^1(1+x^2)^{\frac{1}{2}}(1+x^2)'\,dx\\&=\frac{1}{2}\Big[\frac{2}{3}(1+x^2)^{\frac{3}{2}}\Big]_0^1=\frac{2\sqrt{2}-1}{3}\quad\text{(答)}\end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned}\log\frac{1}{n}\Big\{\frac{(2n)!}{n!}\Big\}^{\frac{1}{n}}&=\log\frac{1}{n}+\frac{1}{n}\log\big({}_{2n}\mathrm{P}_n\big)\\&=-\log n+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\log(n+k)\\&=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\{\log(n+k)-\log n\}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\log\Big(1+\frac{k}{n}\Big)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\log\frac{1}{n}\Big\{\frac{(2n)!}{n!}\Big\}^{\frac{1}{n}}&=\int_0^1\log(1+x)\,dx\\&=\Big[(1+x)\big\{\log(1+x)-1\big\}\Big]_0^1=2\log 2-1=\log\frac{4}{e}\end{aligned}$$

逆関数$y=e^x$の連続性より

$$\begin{aligned}J=\lim_{n\to\infty}e^{\log\frac{1}{n}\left\{\frac{(2n)!}{n!}\right\}^{\frac{1}{n}}}&=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\log\frac{1}{n}\left\{\frac{(2n)!}{n!}\right\}^{\frac{1}{n}}}\\&=e^{\log\frac{4}{e}}=\frac{4}{e}\quad\text{(答)}\end{aligned}$$

$\boxed{12}$ **確認**：$\boxed{9}$ で確認したように，$a \leqq x \leqq b$ で連続関数 $f(x)$ がつねに $f(x) \geqq 0$ を満たすならば，

$$\int_a^b f(x)\,dx \geqq 0$$

は領域 $a \leqq x \leqq b$，$0 \leqq y \leqq f(x)$ の面積を表す。また，この条件下で

$$\int_a^b f(x)\,dx = 0 \iff \text{「}a \leqq x \leqq b \text{ で恒等的に } f(x) = 0\text{」}$$

であることもわかる。$f(x)$ を $g(x) - f(x)$ で置き換えて一般化すると，

$$a \leqq x \leqq b \text{ でつねに } f(x) \leqq g(x) \Longrightarrow \int_a^b f(x)\,dx \leqq \int_a^b g(x)\,dx$$

ここで，等号成立条件は $f(x) \equiv g(x)$ ($a \leqq x \leqq b$)

この定理は逆は成り立たないことに注意を要する。ただし，定積分表示(とみなせる)関数の不等式を証明するために，微分して十分条件が見つけられることもある。

解答：

(1)　$-|f(x)| \leqq f(x) \leqq |f(x)|$ であるから，定積分の性質より

$$-\int_a^b |f(x)|\,dx \leqq \int_a^b f(x)\,dx \leqq \int_a^b |f(x)|\,dx$$

$$\therefore\ \left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqq \int_a^b |f(x)|\,dx$$

(おわり)

(2)　まず，十分条件 $1 - t < \dfrac{1}{1+t} < 1$ ($t > 0$) を確かめると，

$$\frac{1}{1+t} - (1-t) = \frac{1-(1-t)(1+t)}{1+t} = \frac{t^2}{1+t} > 0$$

$$1 - \frac{1}{1+t} = \frac{(1+t)-1}{1+t} = \frac{t}{1+t} > 0$$

であるから成り立つ。よって，定積分の性質より

$$\int_0^x (1-t)\,dt < \int_0^x \frac{1}{1+t}\,dt < \int_0^x dt$$

$$\therefore\ x - \frac{x^2}{2} < \log(1+x) < x$$

(おわり)

(3)　$0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ において $y = \sin x$ のグラフは上に凸であるから，

$$0 < x < \frac{\pi}{2} \text{ のとき } \sin x > \frac{2}{\pi}x$$

よって，定積分の性質より

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\sin x}\,dx < \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{2}{\pi}x}\,dx = \left[-\frac{\pi}{2}e^{-\frac{2}{\pi}x}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{1}{e}\right)$$

(おわり)

$\boxed{13}$ **確認**：面積の考察$\left(\to \boxed{9}\right)$と同様にして，$a \leqq x \leqq b$ の範囲にある立体の $[\,a,\ x\,]$ の部分の体積を $V(x)$，x 軸に垂直な断面による切り口の面積を $S(x)$ とするとき，

$$V'(x) = S(x),\quad V = V(b) - V(a) = \int_a^b S(x)\,dx$$

であることが示される。したがって，立体の体積を求めるには

1° x 軸，y 軸，z 軸のいずれかに垂直な平面による立体の切り口を調べる

2° x 軸に垂直に切った場合，その断面積を x の式で表す

3° 断面積 $S(x)$ を x 方向の存在範囲で積分する

という手順を踏めばよい。ただし，x 軸，y 軸，z 軸のどれに垂直な断面を選べばよいかについては，2°，3° のステップで計算が実行可能かどうかで判断する。回転体の場合は特殊なので，次の $\boxed{14}$ で述べることにする。

立体が x, y, z の不等式で与えられた場合は，x 軸に垂直な断面は「x を固定して yz 平面上の領域とみなしたもの」となる。実は，具体的な立体が与えられるより，不等式で与えられた方がそのまま数式で表されるので解きやすい。その事実を逆利用して，図形をまず数式で表してしまうが定石である。

立体のまま考察してうまくいくのは，錐体のように相似関係により切り口が比でとらえられる場合に限られ，少し難しくなると内分点•外分点の公式を利用する。

解答：

(1) 座標空間において錐体の頂点を原点にとり，底面を平面 $x = h$ 上にとると，平面 $x = t\ (0 \leqq t \leqq h)$ による切り口は頂点(原点)を中心として底面と相似であるから，その断面積 $S(t)$ は

$$S(t) = \frac{t^2}{h^2}S$$

よって，錐体の体積 V は

$$V = \int_0^h S(t)\,dt = \frac{S}{h^2}\int_0^h t^2\,dt = \frac{S}{h^2}\left[\,\frac{1}{3}t^3\,\right]_0^h = \frac{1}{3}Sh$$

(おわり)

(2) 立体 R の z 軸方向の存在範囲は，$0 \leqq 1 - z^2$ より $-1 \leqq z \leqq 1$ であり，この範囲において z 軸に垂直な平面による R の断面は，

$$2 - \sqrt{1 - z^2} \leqq \sqrt{x^2 + y^2} \leqq 2 + \sqrt{1 - z^2}$$

である。その面積 $S(z)$ は

$$S(z) = \pi\left(2 + \sqrt{1 - z^2}\,\right)^2 - \pi\left(2 - \sqrt{1 - z^2}\,\right)^2 = 8\pi\sqrt{1 - z^2}$$

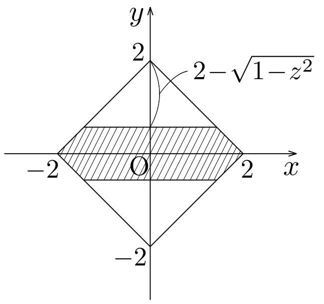
よって，立体 R の体積 V は

$$V = \int_{-1}^1 S(z)\,dz = 8\pi\int_{-1}^1 \sqrt{1 - z^2}\,dz = 8\pi \times \frac{\pi}{2} = 4\pi^2 \quad \text{(答)}$$

(3) 円柱 $A: y^2+z^2 \leqq 1$，四角柱 $B: |x|+|y| \leqq 2$ の共通部分 K は $-1 \leqq z \leqq 1$ の範囲に存在し，z 軸に垂直な平面による切り口

$$-\sqrt{1-z^2} \leqq y \leqq \sqrt{1-z^2}, \quad |x|+|y| \leqq 2$$

を図示すると，次図の斜線部分となる。



断面積 $S(z)$ は

$$S(z) = \left(2\sqrt{2}\,\right)^2 - \frac{1}{2}\left(2-\sqrt{1-z^2}\,\right)^2 \times 4 = 8\sqrt{1-z^2} - 2(1-z^2)$$

立体 K の体積 V は

$$\begin{aligned} V = \int_{-1}^{1} S(z)\,dz &= 16\int_0^1 \sqrt{1-z^2}\,dz - 4\int_0^1 (1-z^2)\,dz \\ &= 16 \times \frac{\pi}{4} - 4\left[z - \frac{1}{3}z^3\right]_0^1 \\ &= 4\pi - \frac{8}{3} \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

$\boxed{14}$ **確認**：回転体の体積を求める場合は，立体の体積を求める基本に従いながらも，回転体という特殊性を活かして考えていくことになる。

回転体は回転軸に垂直な断面が円板なので，迷わずこの断面を考えることになるが，その特殊性から

(回転させる前の)**切り口が回転して断面ができる**

ととらえることがポイントである。単純な場合であれば，回転体の体積 V は

$$V=\int_a^b \pi\{f(x)\}^2\,dx \quad (\text{極薄円柱の連続和：円板の面積の積分})$$

と計算できることになる。

ところが，回転体によっては $\pi\{f(x)\}^2$ の積分が計算不能であったり，$f(x)$ 自体の表示ができないことが起こり得る。そこで，そのような場合は

(i) $\boxed{10}$ (2) のように置換積分と解釈して，積分変数を別のものにする

(ii) 基本に立ち戻って微小円筒形の連続和とみる

という方法がとられる。(ii) の場合は微小体積 ΔV が円柱の側面積と微小厚さ Δx の積(十分に薄いため回転体の側面を底面とする四角柱とみなせる)と考えられて

$$\Delta V \fallingdotseq 2\pi x f(x)\Delta x,\quad \frac{dV}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta V}{\Delta x}=2\pi x f(x)$$

となるから，回転体の体積 V は

$$V=\int_a^b 2\pi x f(x)\,dx \quad (\text{極薄円筒形の連続和：円柱の側面積の積分})$$

と表される。

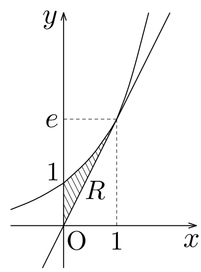
解答：

(1) $x=t$ における $y=e^x$ の接線

$$y=e^t(x-t)+e^t$$

が原点を通るとすれば，$0=e^t(0-t)+e^t$ より $t=1$ であるから，

原点から $y=e^x$ にひいた接線の接点は $(1,\ e)$



領域 R を x 軸のまわりに回転させてできる立体の体積 V_x は

$$V_x=\int_0^1 \pi(e^x)^2\,dx-\frac{1}{3}\cdot\pi e^2\cdot 1$$
$$=\pi\left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^1-\frac{1}{3}\pi e^2=\frac{\pi(e^2-3)}{6} \quad (\text{答})$$

“ $y=e^x \Longleftrightarrow x=\log y$ ” に注意すると，領域 R を y 軸のまわりに回転させてできる立体の体積 V_y は

$$V_y=\frac{1}{3}\cdot(\pi\cdot 1^2)\cdot e-\int_1^e \pi(\log y)^2\,dy$$
$$=\frac{1}{3}\pi e-\pi\Big[y(\log y)^2\Big]_1^e+\pi\int_1^e y\cdot 2(\log y)\cdot\frac{1}{y}\,dy$$

$$= \frac{1}{3}\pi e - \pi e + 2\pi\Big[\,y(\log y - 1)\,\Big]_1^e = \frac{2\pi(3-e)}{3} \quad \text{(答)}$$

(**別解**)

$$V_y = \int_0^1 2\pi x(e^x - ex)\,dx = 2\pi\left[\,xe^x - e^x - \frac{e}{3}x^3\,\right]_0^1 = \frac{2\pi(3-e)}{3} \quad \text{(答)}$$

(2) $D : (x-1)^2 + z^2 \leqq 1$, $y = 1$ の z 軸方向の存在範囲は $-1 \leqq z \leqq 1$ であるから，z 軸のまわりの回転体も $-1 \leqq z \leqq 1$ の範囲にある。

円板 D を $-1 \leqq z \leqq 1$ の範囲で z 軸に垂直に切ると，その断面

$$1 - \sqrt{1-z^2} \leqq x \leqq 1 + \sqrt{1-z^2},\ \ y = 1$$

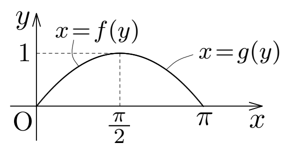
は線分である。その線分を z 軸(断面上では原点)のまわりに回転させた図形が回転体の断面であるから，断面積 $S(z)$ は

$$S(z) = \pi\left\{1 + \left(1 + \sqrt{1-z^2}\,\right)^2\right\} - \pi\left\{1 + \left(1 - \sqrt{1-z^2}\,\right)^2\right\}$$
$$= 4\pi\sqrt{1-z^2}$$

よって，立体の体積 V は

$$V = \int_{-1}^1 S(z)\,dz = 4\pi\int_{-1}^1 \sqrt{1-z^2}\,dz = 4\pi \times \frac{\pi}{2} = 2\pi^2 \quad \text{(答)}$$

(3) **解法 1**：$y = \sin x$ の $0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ の部分を $x = f(y)$，$\dfrac{\pi}{2} \leqq x \leqq \pi$ の部分を $x = g(y)$ とおくと，



$$V = \int_0^1 \pi g(y)^2\,dy - \int_0^1 \pi f(y)^2\,dy$$
$$= \int_\pi^{\frac{\pi}{2}} \pi x^2 (\sin x)'\,dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \pi x^2(\sin x)'\,dx$$
$$= \pi\int_\pi^0 x^2(\sin x)'\,dx$$
$$= \pi\Big[\,x^2\sin x\,\Big]_\pi^0 - \pi\int_\pi^0 2x\sin x\,dx$$
$$= 0 - 2\pi\Big[\,x\,(-\cos x)\,\Big]_\pi^0 - 2\pi\int_\pi^0 \cos x\,dx = 2\pi^2 \quad \text{(答)}$$

解法 2：

$$V = \int_0^\pi 2\pi x\sin x\,dx = 2\pi\Big[\,x\,(-\cos x)\,\Big]_0^\pi + 2\pi\int_0^\pi \cos x\,dx = 2\pi^2 \quad \text{(答)}$$

(注)

1° ファイルを軽くするために論証に不要な図は省略してあるが，各自で図示して題意の確認を行なってほしい。

2° 円錐の体積の公式は，証明なしに用いてもよい。

$\boxed{15}$ **確認**：一般に，時刻 t における変位を表す(2 回)微分可能な関数 $x = x(t)$ について，t における**速度** $\boldsymbol{v}$，**加速度** $\boldsymbol{\alpha}$ は

$$v = \frac{dx}{dt}, \quad \alpha = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

である。**速度はベクトル**であり，平面上および空間内では

$$\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right), \quad \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right)$$

と定義される。速度(ベクトル)の大きさを**速さ**という。

速度，加速度は，運動する物体だけでなく，時間の経過とともに滑らかに変化するものすべてに定義できる。水(一般には流体)の変化を考える問題は典型的である。

水(流体)の問題では，**与えられた条件を流量と容積の２通りに表すのが定石**であり，そのあと適当に微分・積分すれば解決する。パターンが決まっているので，見かけに反してやさしい問題であることが多い。敬遠してきた人は，大損しているはず。

解答：

(1) 回転体の体積として V を計算すると

$$\begin{aligned} V = \int_1^{h+1} \pi x^2\,dy &= \int_1^{h+1} \pi \log y\,dy & \cdots\cdots ① \\ &= \pi\Big[\,y(\log y - 1)\,\Big]_1^{h+1} \\ &= \pi\{(h+1)\log(h+1) - h\} & \cdots\cdots ② \ \text{(答)} \end{aligned}$$

(2) ①の両辺を時刻の変数 t で微分すると，

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dh}\,\frac{dh}{dt} = \pi\log(h+1)\frac{dh}{dt}$$

$$\therefore \quad \frac{dh}{dt} = \frac{1}{\pi\log(h+1)}\,\frac{dV}{dt} \qquad \cdots\cdots ③$$

水面の半径を r とすると

$$h + 1 = e^{r^2} \iff r^2 = \log(h+1)$$

であるから，水面の面積 S は

$$S = \pi r^2 = \pi\log(h+1)$$

t で微分すると

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\pi}{h+1}\,\frac{dh}{dt} \qquad \cdots\cdots ④$$

$V = \pi$ のとき，②より

$$\pi(h+1)\{\log(h+1) - 1\} = 0 \qquad \therefore \ \log(h+1) = 1, \quad h + 1 = e$$

よって，$\dfrac{dV}{dt} = 2\,(\mathrm{cm}^3/\mathrm{sec})$，$V = \pi\,(\mathrm{cm}^3)$ のとき，③, ④に代入して

$$\left.\begin{aligned} &\text{水面の上昇速度は } \frac{dh}{dt} = \frac{1}{\pi\cdot 1}\cdot 2 = \frac{2}{\pi}\,(\mathrm{cm}/\mathrm{sec}) \\ &\text{水面の広がる速さは } \frac{dS}{dt} = \frac{\pi}{e}\cdot\frac{2}{\pi} = \frac{2}{e}\,(\mathrm{cm}^2/\mathrm{sec}) \end{aligned}\right\} \text{(答)}$$

$\boxed{16}$ **確認**：変位(位置)を時間で微分すると速度が得られるのだから，逆に速さ(速度の大きさ)を積分すると道のり(曲線に沿った長さ)が求められる。したがって，曲線 $C : x = x(t),\ y = y(t)$ の $\alpha \leqq t \leqq \beta$ に対応する部分の長さ L は

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$

で表される。関数 $y = f(x)$ の $a \leqq x \leqq b$ に対応する部分の長さ $\tilde{L}$ は，上式において $x = t,\ y = f(t)$ とみることにより，

$$\tilde{L} = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\,dx$$

と表される。ただし，この定積分が実際に計算できる関数は絶望的に少なく，何題か解けば見覚えのある式ばかりになる。現行課程では，公式自体は範囲外である。

(3)に現れる被積分関数 $\sqrt{1+x^2}$ は $x = \tan\theta$ と置換しても計算できるが，(2)の計算から類推して $x = \dfrac{e^t + e^{-t}}{2}$ と置換する方が見通し良く計算できる。

解答：

(1) $\dfrac{dx}{dt} = (\cos t + t\sin t)' = t\cos t,\quad \dfrac{dy}{dt} = (\sin t - t\cos t)' = t\sin t$

であるから，求める曲線の長さ L は

$$L = \int_0^\pi \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt = \int_0^\pi t\,dt = \frac{\pi^2}{2} \quad (答)$$

(2) 求める曲線の長さ L は

$$\begin{aligned}L &= \int_0^2 \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx = \int_0^2 \sqrt{1 + \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2}\,dx \\ &= \int_0^2 \frac{e^x + e^{-x}}{2}\,dx \\ &= \left[\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right]_0^2 = \frac{1}{2}\left(e^2 - \frac{1}{e^2}\right) \quad (答)\end{aligned}$$

(3) (2)をヒントにして $x = \dfrac{e^t - e^{-t}}{2}$ とおくと，

$$x = 2 \iff e^{2t} - 4e^t - 1 = 0 \iff e^t = 2 + \sqrt{5} \iff t = \log\left(2 + \sqrt{5}\,\right)$$

求める曲線の長さ L は

$$\begin{aligned}L = \int_0^2 \sqrt{1+x^2}\,dx &= \int_0^{\log(2+\sqrt{5}\,)} \sqrt{1 + \left(\frac{e^t - e^{-t}}{2}\right)^2}\left(\frac{e^t - e^{-t}}{2}\right)' dt \\ &= \int_0^{\log(2+\sqrt{5}\,)} \left(\frac{e^t + e^{-t}}{2}\right)^2 dt \\ &= \frac{1}{4}\left[\frac{1}{2}e^{2t} + 2t - \frac{1}{2}e^{-2t}\right]_{e^t=1}^{e^t=2+\sqrt{5}} \\ &= \sqrt{5} + \frac{1}{2}\log(2+\sqrt{5}\,) \quad (答)\end{aligned}$$

$\boxed{17}$ **確認**：ここでは，定積分で表された漸化式のうち

1° $\boxed{8}$ (1)の解法にならって定積分を a_n とおいて漸化式を導くタイプ

2° 部分積分により漸化式を導くタイプ

を扱う。この手の問題は難しくはないが，はじめて解くときには戸惑いを覚えるので，経験が必要だと言えよう。

解答：

(1) $a_n = \displaystyle\int_0^1 e^y f_n(y)\,dy$ とおくと， $a_1 = \displaystyle\int_0^1 ye^y\,dy = \Big[ye^y - e^y\Big]_0^1 = 1$ であり，

$$f_{n+1}(x) = x + \frac{1}{2}a_n e^{-x} \qquad \cdots\cdots\ (*)$$

と表されるから，

$$a_{n+1} = \int_0^1 e^y\Big(y + \frac{1}{2}a_n e^{-y}\Big)\,dy = \Big[ye^y - e^y + \frac{1}{2}a_n y\Big]_0^1 = \frac{1}{2}a_n + 1$$

$$\therefore\ a_{n+1} - 2 = \frac{1}{2}(a_n - 2)$$

よって，$\{a_n - 2\}$ は初項 $a_1 - 2 = -1$，公比 $\dfrac{1}{2}$ の等比数列であるから，

$$a_n - 2 = -\Big(\frac{1}{2}\Big)^{n-1} \qquad \therefore\ a_n = 2 - \frac{1}{2^{n-1}}$$

$(*)$ に代入して，求める関数 $f_n(x)$ は

$$f_n(x) = x + \frac{1}{2}a_{n-1}\,e^{-x} = x + \Big(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\Big)e^{-x} \quad \text{(答)}$$

($n = 1$ のときも成り立つ)

(2) まず，$n = 1$ のときを計算すると

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos 2x}{2}\,dx = \frac{1}{2}\Big[x - \frac{1}{2}\sin 2x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$$

部分積分法により

$$\begin{aligned}
I_n &= \Big[\sin^{2n-1} x\,(-\cos x)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2n-1)\sin^{2n-2} x\,(\sin x)'\cos x\,dx \\
&= 0 + (2n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-2} x\,(1 - \sin^2 x)\,dx \\
&= (2n-1)(I_{n-1} - I_n)
\end{aligned}$$

$$\therefore\ I_n = \frac{2n-1}{2n}I_{n-1} = \frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{2n-3}{2n-2}\cdot\cdots\cdot\frac{3}{4}I_1$$

$I_1 = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\pi}{2}$， $(2n)!! = 2^n n\,!$， $(2n-1)!! \times (2n)!! = (2n)!$ に注意すると

$$I_n = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n\,!)^2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi\,(2n)!}{2^{2n+1}(n\,!)^2} \quad \text{(答)}$$

$\boxed{18}$ **確認**：無限級数は，有限部分和の極限が定義であった。

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} a_k$$

有限部分和が具体的には求められない場合，区分求積法($\to \boxed{11}$)とみる方法以外に，

有限部分和を定積分を用いて 2 通りに表す

という解法がある。この定積分を用いる解法では，決まって n の入ったうっとうしい定積分の式がひとつ残るのだが，これをうまく評価して 0 に収束することを示すのが腕の見せ所である。その際，$\boxed{12}$ (1)で示した不等式を用いることが多い。

解答：

$k = 1,\ 2,\ \cdots,\ n$ について

$$\frac{(-1)^{k-1}}{k} = \int_0^1 (-1)^{k-1}x^{k-1}\,dx$$

であるから，$0 \leqq x \leqq 1$ では $-x \neq 1$ であることに注意すると

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k} = \int_0^1 \sum_{k=1}^{n}(-x)^{k-1} = \int_0^1 \frac{1-(-x)^n}{1-(-x)}\,dx$$
$$= \int_0^1 \frac{1}{1+x}\,dx - \int_0^1 \frac{(-x)^n}{1+x}\,dx \quad \cdots\cdots \text{①}$$

ここで，

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x}\,dx = \Big[\log(1+x)\Big]_0^1 = \log 2 \quad \cdots\cdots \text{②}$$

$$\left|\int_0^1 \frac{(-x)^n}{1+x}\,dx\right| \leqq \int_0^1 \left|\frac{(-x)^n}{1+x}\right|dx = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,dx \leqq \int_0^1 x^n\,dx = \frac{1}{n+1}$$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1} = 0$ であるから，ハサミウチの原理より

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{(-x)^n}{1+x}\,dx = 0 \quad \cdots\cdots \text{③}$$

①の両辺 $n \to \infty$ とすると，②, ③より

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k} = \log 2 \quad (\text{答})$$