

一様な電界(電場)および磁界(磁場)での陽子の運動について、次の問いに答えよ。ただし、陽子の質量および電荷はそれぞれ m [kg], e [C] であり、重力や空気抵抗はないものとする。

まず、図1のように、大きさ E [N/C] の一様な電界を x 軸方向、正の向きに加え、原点 O から速さ v [m/s] で x 軸と角度 θ ($45^\circ < \theta < 90^\circ$) をなす方向に陽子を射出させた。

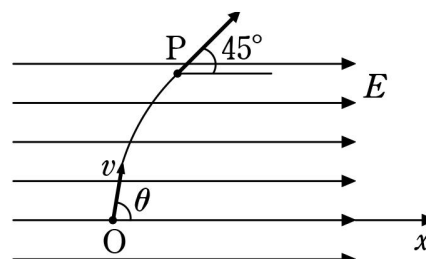


図1

(1) 陽子の運動の方向と x 軸のなす角度が 45° になる点 P までいくのに要する時間 t_0 [s] を E , v , θ , m , e を用いて表せ。

(2) 点 P の x 座標を E , v , θ , m , e , t_0 を用いて表せ。

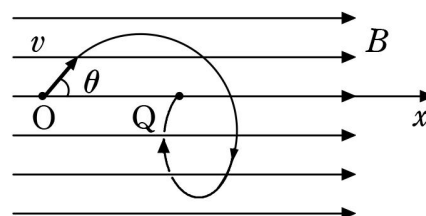


図2

次に、図2のように、電界のかわりに磁束密度 B [T] の一様な磁界を x 軸方向、正の向きに加え、ふたたび、原点 O から速さ v で x 軸と角度 θ をなす方向に陽子を射出させた。

(3) $\theta = 90^\circ$ のとき、陽子は点 O を出てから円軌道を描いて再び点 O を通る。この円軌道の半径 r [m] を B , v , m , e を用いて表せ。

(4) (3) の円運動の周期 T [s] を B , m , e を用いて表せ。

(5) 陽子が点 O から x 軸と角度 θ ($0^\circ < \theta < 90^\circ$) をなす方向に出て、再び x 軸上を通る点を Q とする。距離 OQ [m] を B , v , θ , m , e を用いて表せ。

解説

荷電粒子が電場から受ける力はつねに qE の一定方向で、粒子は放物運動をする。磁場から受ける力 $qv_{\perp}B$ は向心力となり粒子は円運動をする。

(1) 図のように y 軸を定める。陽子は $+x$ 方向に eE

の力を電場から受ける。加速度を a とすると、

$ma = eE$ より、 x 方向には $a = \frac{eE}{m}$ の等加速度運動

をし、 t [s] 後の速度の x 成分 v_x' は

$$v_x' = v \cos \theta + \frac{eE}{m} t$$

y 方向には力を受けないから、等速運動を続ける。その速度の y 成分 v_y' は

$$v_y' = v \sin \theta$$

x 軸となす角が 45° の P 点では

$$\frac{v_y'}{v_x'} = \tan 45^\circ = 1$$

となる。ゆえに $v_x' = v_y'$

$$\text{すなわち } v \cos \theta + \frac{eE}{m} t_0 = v \sin \theta$$

$$\text{よって } t_0 = \frac{mv(\sin \theta - \cos \theta)}{eE} \quad [\text{s}]$$

(2) 等加速度運動より $x = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$ に、

$t = t_0$, $v_0 = v \cos \theta$, $a = \frac{eE}{m}$ を代入して

$$x = v t_0 \cos \theta + \frac{eE}{2m} t_0^2 \quad [\text{m}]$$

(3) 磁場に垂直な面内における円運動だから、

$$m \frac{v^2}{r} = evB$$

$$\text{よって } r = \frac{mv}{eB} \quad [\text{m}]$$

(4) 円運動の周期 $T = \frac{2\pi r}{v}$ に(3)の結果を代入して

$$T = \frac{2\pi}{v} \cdot \frac{mv}{eB} = \frac{2\pi m}{eB} \quad [\text{s}]$$

(5) 陽子の速度 v の、点 O における磁場に平行な成分と、磁場に垂直な成分はそれぞれ、 $v \cos \theta$, $v \sin \theta$ である。磁場に垂直な面内では(4)と同様に $T = \frac{2\pi m}{eB}$ の周期(速度 $v \sin \theta$ にはよらない)の円運動をする。

x 方向は $v \cos \theta$ の等速運動であるから、

$$\begin{aligned} \text{OQ} &= v_x \cdot T = v \cos \theta \cdot \frac{2\pi m}{eB} \\ &= \frac{2\pi m v \cos \theta}{eB} \quad [\text{m}] \end{aligned}$$

