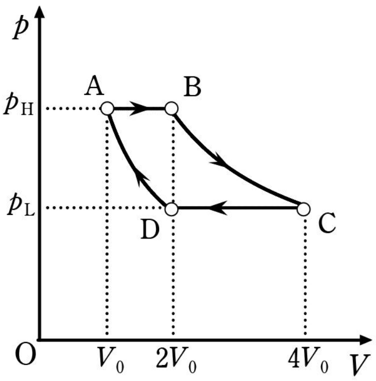
ピストンとシリンダーからなる熱機関について考える。シリンダー内には，理想気体として扱うことができる単原子分子気体が n〔mol〕封入されている。この気体の気体定数を R〔J/(mol·K)〕とするとき，定積モル比熱は $\frac{3}{2}R$〔J/(mol·K)〕，定圧モル比熱は $\frac{5}{2}R$〔J/(mol·K)〕である。この熱機関では，気体の状態が図のように A→B→C→ D→A という経路（サイクル）で変化する。状態変化 A→B および C→D は定圧変化，状態変化 B→C および D→A は断熱変化である。気体の状態を気体の圧力 p〔Pa〕と体積 V〔m^3〕を組にして $(p,\ V)$ で表すとき，図の各状態は，状態 A：$(p_H,\ V_0)$，状態 B：$(p_H,\ 2V_0)$ ，状態 C：$(p_L,\ 4V_0)$ ，状態 D：$(p_L,\ 2V_0)$ である。以下



の (1)〜(9) に答えよ。ただし，気体がする仕事の符号は，気体が膨張する場合を正とし，収縮する場合を負とする。また，熱の符号は，気体が加熱される場合を正とし，冷却される場合を負とする。なお，各設問の末尾で{　}内に記号が指示されている場合には，その記号のみを用いて解答せよ。

(1)　状態 A の気体の絶対温度を求めよ。$\{p_H,\ V_0,\ n,\ R\}$

(2)　状態変化 A→B において，気体の内部エネルギーの変化 ΔU_{AB}〔J〕と気体のする仕事 W_{AB}〔J〕を求めよ。ただし，ΔU_{AB} は，U_A，U_B をそれぞれ状態 A，状態 B の気体の内部エネルギーとするとき，$\Delta U_{AB}=U_B-U_A$ を表すものとする。$\{p_H,\ V_0\}$

(3)　状態変化 A→B で，気体が得る熱量 Q_{AB}〔J〕を求めよ。$\{p_H,\ V_0\}$

(4)　状態変化 B→C は断熱膨張である。このときの気体の内部エネルギーの変化を ΔU_{BC}〔J〕，気体のする仕事を W_{BC}〔J〕とするとき，W_{BC} を ΔU_{BC} で表せ。また，内部エネルギーの変化 ΔU_{BC} を求めよ。$\{p_H,\ p_L,\ V_0\}$

(5)　この熱機関が 1 サイクル A→B→C→D→A の間に得る熱量は合計でいくらになるか。$\{p_H,\ p_L,\ V_0\}$

(6)　この熱機関が 1 サイクルの間にする仕事は合計でいくらになるか。$\{p_H,\ p_L,\ V_0\}$

(7)　この熱機関の熱効率を求めよ。$\{p_H,\ p_L\}$

(8)　単原子分子理想気体の断熱変化では，$pV^{\frac{5}{3}}$ が一定に保たれることがわかっている。このため，図の状態変化における p_H と p_L は互いに独立ではない。p_H と p_L の関係を式で表せ。$\{p_H,\ p_L\}$

次に，この熱機関の熱効率を有効数字 2 桁（けた）で計算せよ。必要なら $2^{\frac{2}{3}}=1.59$ を利用せよ。

(9)　「熱機関」ということばを用いて，熱力学の第 2 法則を 60 字以内で説明せよ。

解説

(1)　$p_{\mathrm{H}}V_0 = nRT$　より　$T = \dfrac{p_{\mathrm{H}}V_0}{nR}$〔K〕

(2)　単原子分子の内部エネルギー U は $pV = nRT$ を用いて　$U = \dfrac{3}{2}nRT = \dfrac{3}{2}pV$　となる。よって

$$\Delta U_{\mathrm{AB}} = U_{\mathrm{B}} - U_{\mathrm{A}} = \frac{3}{2}p_{\mathrm{H}} \times 2V_0 - \frac{3}{2}p_{\mathrm{H}} \times V_0$$

$$= \frac{3}{2}p_{\mathrm{H}}V_0\,〔\mathrm{J}〕$$

定圧変化で気体のする仕事　$W' = p\Delta V$　より

$W_{\mathrm{AB}} = p_{\mathrm{H}}\Delta V = p_{\mathrm{H}}(2V_0 - V_0) = p_{\mathrm{H}}V_0$〔J〕

(3)　熱力学第一法則 $\Delta U = Q + W$ で，W は気体に加わる仕事である。よって，気体がする仕事 W_{AB} を用いると，$W = -W_{\mathrm{AB}}$ となる。

ゆえに　$Q_{\mathrm{AB}} = \Delta U_{\mathrm{AB}} - (-W_{\mathrm{AB}})$

$$= \frac{3}{2}p_{\mathrm{H}}V_0 + p_{\mathrm{H}}V_0 = \frac{5}{2}p_{\mathrm{H}}V_0\,〔\mathrm{J}〕$$

別解　定圧モル比熱 C_p，$pV = nRT$　を用いて

$$Q = nC_p\Delta T = \frac{5}{2}nR\Delta T = \frac{5}{2}p_{\mathrm{H}}\Delta V$$

$$= \frac{5}{2}p_{\mathrm{H}}(2V_0 - V_0) = \frac{5}{2}p_{\mathrm{H}}V_0\,〔\mathrm{J}〕$$

(4)　$\Delta U = Q + W$，断熱膨張より

$Q = 0$，$W = -W_{\mathrm{BC}}$

よって　$\Delta U_{\mathrm{BC}} = 0 - W_{\mathrm{BC}}$

ゆえに　$W_{\mathrm{BC}} = -\Delta U_{\mathrm{BC}}$〔J〕

$$\Delta U_{\mathrm{BC}} = U_{\mathrm{C}} - U_{\mathrm{B}} = \frac{3}{2}p_{\mathrm{L}} \times 4V_0 - \frac{3}{2}p_{\mathrm{H}} \times 2V_0$$

$$= 3(2p_{\mathrm{L}}V_0 - p_{\mathrm{H}}V_0)\,〔\mathrm{J}〕$$

(5)　A$\longrightarrow$B，B$\longrightarrow$C，C$\longrightarrow$D，D$\longrightarrow$A で得る熱量をそれぞれ Q_{AB}，Q_{BC}，Q_{CD}，Q_{DA} とする。

B$\longrightarrow$C，D$\longrightarrow$A は断熱変化なので

$Q_{\mathrm{BC}} = Q_{\mathrm{DA}} = 0$

$$Q_{\mathrm{CD}} = nC_p\Delta T = \frac{5}{2}nR\Delta T = \frac{5}{2}p_{\mathrm{L}}\Delta V$$

$$= \frac{5}{2}p_{\mathrm{L}}(2V_0 - 4V_0) = -5p_{\mathrm{L}}V_0$$

1サイクルでの熱量の合計 Q は

$$Q = Q_{\mathrm{AB}} + Q_{\mathrm{BC}} + Q_{\mathrm{CD}} + Q_{\mathrm{DA}}$$

$$= \frac{5}{2}p_{\mathrm{H}}V_0 + 0 - 5p_{\mathrm{L}}V_0 + 0$$

$$=\frac{5}{2}p_{\mathrm{H}}V_0-5p_{\mathrm{L}}V_0 \text{〔J〕}$$

(6)　1サイクルでは同じAにもどってくるので

$\varDelta U=0$

1サイクルでする仕事を W_1 とすると

$W=-W_1$，$\varDelta U=Q+W$　より

$0=Q-W_1$

よって　$W_1=Q=\frac{5}{2}p_{\mathrm{H}}V_0-5p_{\mathrm{L}}V_0$〔J〕

(7)　熱効率　$e=\frac{\text{仕事}}{\text{吸収した熱量}}$　で表される。

A⟶B⟶C⟶D⟶Aの1サイクルで熱量を吸収するのは，A⟶Bで Q_{AB} のみである。

よって　$e=\frac{W_1}{Q_{\mathrm{AB}}}=\frac{\frac{5}{2}p_{\mathrm{H}}V_0-5p_{\mathrm{L}}V_0}{\frac{5}{2}p_{\mathrm{H}}V_0}$

$=1-2\frac{p_{\mathrm{L}}}{p_{\mathrm{H}}}$ ……①