$\boxed{1}$ **（等差数列）**

第 10 項が 2，第 15 項が 17 である等差数列を $\{a_n\}$ とし，$\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n とする。

(1) 一般項 a_n を求めよ。

(2) S_n の最小値およびそのときの n を求めよ。

$\boxed{2}$ **（等比数列）**

等比数列 $\{a_n\}$ が条件

$$a_3 + a_4 = \frac{8}{27}, \quad a_4 + a_5 = \frac{8}{81}$$

を満たすとき，次の問に答えよ。

(1) 一般項 a_n を求めよ。

(2) 初項から第 n 項までの和 S_n を求めよ。

(3) 和 S_n がはじめて 2.995 を越えるときの n の値を求めよ。

$\boxed{3}$ **（和を求める技巧）**

次の各和を求めよ。

(1) $S_n = 2 + 3r + 4r^2 + \cdots + (n+1)r^{n-1}$

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4k^2 - 1}$

(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$

$\boxed{4}$ **（Σの公式）**

(1) $a_n = n(n-1)(n-2)$ とするとき，$a_{n+1} - a_n$ を求めよ。

(2) 公式 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ を導け。

$\boxed{5}$ **(格子点の個数)**

自然数 n に対して，$2|x|+|y| \leqq 2n$ を満たす整数の組 $(x,\ y)$ の個数を求めよ。

$\boxed{6}$ **(群数列)**

$$1,\ 2,\ 1,\ 3,\ 2,\ 1,\ 4,\ 3,\ 2,\ 1,\ 5,\ 4,\ 3,\ 2,\ 1,\ 6,\ \cdots\cdots$$

と続く数列がある。

(1) はじめて 100 が現れるのは第何項か。

(2) 第 1000 項の数字を求めよ。

(3) 初項から第 1000 項までの和を求めよ。

$\boxed{7}$ **（数列の増減）**

(1) $a_n = n^3 - 7n^2 - 10n \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ の最小値を求めよ。

(2) $b_n = {}_{100}\mathrm{C}_n \left(\dfrac{1}{2}\right)^n \quad (n = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 100)$ を最大にする n を求めよ。

$\boxed{8}$ **（数列の和と一般項）**

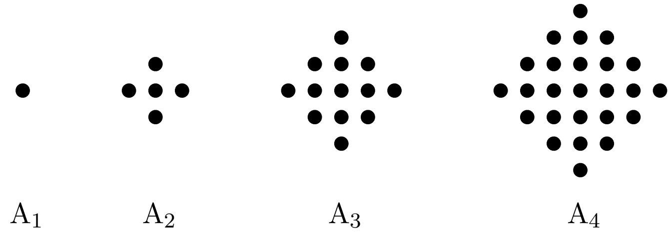
各項が正である数列 $\{a_n\}$ に対し，$S_n = a_1 + a_2 + \cdots\cdots + a_n$ とおく。関係式

$$4S_n = {a_n}^2 + 2a_n + 1 \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

が成り立つとき，a_n と S_n をそれぞれ n の式で表せ。

$\boxed{9}$ **（階差で表される漸化式）**

次図のように，点の個数を増やしていくとき，n 番目の図形 A_n に含まれる点の個数を a_n とする。数列 $\{a_n\}$ について，次の各問に答えよ。



(1)　$a_{n+1} - a_n$ を求めよ。

(2)　一般項 a_n を求めよ。

$\boxed{10}$ **（特殊解を求めて等比数列に帰着）**

次の各漸化式を解け。

(1)　$a_1 = 2,\ \ a_{n+1} = \dfrac{2}{3}a_n + 1\ (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$

(2)　$a_1 = 0,\ \ a_{n+1} = \dfrac{1}{2}a_n + n\ (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$

(3)　$a_1 = 1,\ \ a_{n+1} = 3a_n + 2^n\ (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$

$\boxed{11}$ **（分数漸化式）**

　漸化式

$$a_1 = 4,\quad a_{n+1} = \frac{4a_n + 8}{a_n + 6}\ (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

について考える。

(1)　$\alpha = \dfrac{4\alpha + 8}{\alpha + 6}$ を満たす α に対して，$a_{n+1} - \alpha$ を計算せよ。

(2)　一般項 a_n を求めよ。

$\boxed{12}$ **（連立漸化式）**

　2 つの数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ は，漸化式

$$\begin{aligned} a_1 &= b_1 = 1 \\ a_{n+1} &= a_n + b_n \\ b_{n+1} &= 4a_n + b_n \end{aligned} \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

で定義されている。

(1)　数列 $\{a_n + \alpha b_n\}$ が等比数列となるように定数 α の値を求めよ。

(2)　数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ の一般項を求めよ。

$\boxed{13}$ **(３項間漸化式)**

次の各漸化式を解け。

(1) $a_1 = 1,\ a_2 = 2,\ a_{n+2} = 2a_{n+1} + a_n\ (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$

(2) $a_1 = 1,\ a_2 = 2,\ a_{n+2} = 6a_{n+1} - 9a_n\ (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$

$\boxed{14}$ **(数学的帰納法)**

n が 2 以上の自然数であるとき

$$\frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \cdots\cdots + \frac{1}{n^3} < 2 - \frac{1}{n^2}$$

が成り立つことを証明せよ。

$\boxed{15}$ **（予想して立証）**

数列 $\{a_n\}$ は，関係式

$$a_1 = 2,$$
$$(a_{n+1} - a_n)^2 = 2(a_{n+1} + a_n),\ \ a_{n+1} > a_n \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

によって定まっている。

(1) a_2，a_3，a_4 を計算せよ。

(2) 一般項 a_n を n の式で表せ。

$\boxed{16}$ **（数列の極限）**

次の数列の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2-5n-6}{3n^2+4n+5}$　(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{5n^2-1}+7n}{\sqrt[3]{8n^3+3n}}$　(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n^3+9n^2+3}{5n^2-2n+6}$

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}k^2$　(5) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+3n}-\sqrt{n^2-3n}\right)$

$\boxed{17}$ **（ハサミウチの原理，追い出しの原理）**

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{n}{5}\pi$ を求めよ。

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left\{(-1)^{n+1}\sqrt{n+1}+(-1)^n\sqrt{n}\right\}$ を求めよ。

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(n^3-3n^2-9n)$ を求めよ。

$\boxed{18}$ **（等比数列の極限）**

(1) $h > 0$ のとき，不等式 $(1+h)^n > \dfrac{n(n-1)}{2}h^2$ が成り立つことを示せ。

(2) $r > 1$ のとき， $\displaystyle\lim_{n\to\infty} r^n = +\infty$ および $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{r^n}{n} = +\infty$ を示せ。

(3) $-1 < r < 1$ のとき， $\displaystyle\lim_{n\to\infty} r^n = 0$ および $\displaystyle\lim_{n\to\infty} nr^n = 0$ を示せ。

$\boxed{19}$ **（漸化式と極限）**

数列 $\{a_n\}$ が次の漸化式で定義されているとき， $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ。

(1) $a_1 = 1,\ \ a_{n+1} = \dfrac{2}{3}a_n + 3\ \ (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

(2) $a_1 = 1,\ \ a_{n+1} = \dfrac{3}{2}a_n - 3\ \ (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

(3) $a_1 = 1,\ \ a_{n+1} = \dfrac{a_n + 2}{a_n + 1}\ \ (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

(4) $a_1 = 1,\ \ a_{n+1} = \sqrt{a_n + 2}\ \ (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

(5) $a_1 = 1,\ \ a_{n+1} = 1 + \dfrac{a_n}{n}\ \ (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

$\boxed{20}$ **（無限級数）**

次の無限級数の収束・発散を調べ，収束する場合は和を求めよ。

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \log_2\left(1+\frac{1}{n}\right)$

(3) $\dfrac{2}{3}+\dfrac{4}{5}+\dfrac{6}{7}+\dfrac{8}{9}+\dfrac{10}{11}+\cdots$

(4) $\dfrac{2}{3}-\dfrac{2}{3}+\dfrac{4}{5}-\dfrac{4}{5}+\dfrac{6}{7}-\dfrac{6}{7}+\cdots$

$\boxed{21}$ **（無限等比級数）**

(1) 無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$ が収束するための条件を求めよ。

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+3^n}{5^n}$ を求めよ。

(3) 十進表示で $0.1\dot{2}\dot{3}$ と表される小数を分数で表せ。

$\boxed{1}$ **確認**：ある定数 d に対して

$$a_{n+1} - a_n = d \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

となる数列 $\{a_n\}$ を**等差数列**といい，d を**公差**という。構造を考えると

$$a_m - a_n = (m-n)d$$

が自然数 $m,\ n$ の大小に関係なく成り立ち，特に

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

が成り立つ。

$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_n$ がこの順で公差 d の等差数列であるとき，逆に $a_n,\ a_{n-1},\ \cdots,$ $a_2,\ a_1$ と並べた数列は公差 $-d$ の等差数列であるから

$$a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = a_3 + a_{n-2} = \cdots\cdots$$

である。したがって,

$$\begin{aligned} S_n &= a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n \\ &= \frac{1}{2}\{(a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + \cdots + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1)\} \\ &= \frac{n}{2}(a_1 + a_n) \end{aligned}$$

が成り立つ。

解答：

(1) 公差を d とすると，仮定より

$$d = \frac{a_{15} - a_{10}}{15 - 10} = \frac{17-2}{5} = 3$$

よって，一般項 a_n は

$$a_n = 2 + 3(n-10) = 3n - 28 \quad \text{(答)}$$

(2) 公差が正であり，$a_n < 0 \iff n < \dfrac{28}{3} = 9 + \dfrac{1}{3}$ であるから,

$$a_1 < a_2 < \cdots < a_9 < 0 < a_{10} < \cdots$$

となる。つまり，$a_n < 0$ のとき S_n は減少し，$a_n > 0$ のとき S_n は増加する。

よって，S_n が最小となるのは $n = 9$ のときであり，S_n の最小値は

$$S_9 = \frac{9}{2}(a_1 + a_9) = \frac{9}{2}(-25 - 1) = -117 \quad \text{(答)}$$

(注)

1° $\{S_n\}$ は $\{a_n\}$ の階差数列であるから，a_nの符号から S_n の増減がわかる。$(\to \boxed{7})$

2° S_n を n の 2 次関数とみて最大値を求めることもできる。

$\boxed{2}$ **確認**：ある定数 r に対して

$$a_{n+1} = r\,a_n \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

となる数列 $\{a_n\}$ を**等比数列**といい，r を**公比**という。$a_n \neq 0$ のとき

$$a_m = a_n r^{m-n}$$

が自然数 $m,\ n$ の大小に関係なく成り立ち，特に

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

が成り立つ。

$$S_n = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1}$$

の両辺に r をかけると

$$rS_n = \qquad ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + ar^n$$

となるから，$r \neq 1$ のとき

$$S_n - rS_n = a - ar^n \qquad \therefore\ S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$$

ここで，r をかけて“ずらし”を行なうという発想は，$\boxed{3}$ (1) の和を求めるときなど，いろいろな解法の基礎となる。なお，等比数列の和が知りたいだけであれば，「数と式」における公式

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \cdots + b^{n-1})$$

に $a = r,\ b = 1$ を代入するのが最も早い。

解答：

(1) $\{a_n\}$ の公比 r は

$$r = \frac{a_4 + a_5}{a_3 + a_4} = \frac{1}{3}$$

であるから，$a_3(1+r) = \dfrac{8}{27}$ より $a_3 = \dfrac{2}{9}$ であり，一般項は

$$a_n = \frac{2}{9}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-3} = 2\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \quad (答)$$

(2) (公比) $= \dfrac{1}{3} \neq 1$ であるから，公式より

$$S_n = \frac{2\left\{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}}{1 - \frac{1}{3}} = 3\left\{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right\} \quad (答)$$

(3) $S_n = 3\left\{1 - \left(\dfrac{1}{3}\right)^n\right\} > 2.995 \iff \left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1} < 0.005 = \dfrac{1}{200} \iff 3^{n-1} > 200$

であるから，$3^4 = 81,\ 3^5 = 243$ より

$$n - 1 \geqq 5 \qquad \therefore\ n \geqq 6$$

よって，S_n がはじめて 2.995 を越えるときの n の値は

$$n = 6 \quad (答)$$

$\boxed{3}$ **確認**：和を求める技巧で重要なのは

(i) 公比(にあたるもの)をかけて“ずらし”を行なう

(ii) 階差数列の性質 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}(a_{k+1}-a_k)=a_n-a_1\ (n \geqq 2)$ を用いる

の2つである。(i)については $\boxed{2}$ **確認** を参照のこと。(ii)については，本問で確認する「部分分数展開」と $\boxed{4}$ で確認する「階乗関数の活用」が最も基本的である。

部分分数展開といっても，ここで扱うのは一般のものではなく，単位分数が

$$\frac{1}{abc}=k\left(\frac{1}{ab}-\frac{1}{bc}\right) \qquad \left(k=\frac{1}{c-a}\right)$$

と変形できることをあらかじめ覚えておくことで，手早く階差の形に直す作業を指す。

解答：

(1)
$$\begin{aligned} S_n &= 2+3r+4r^2+\cdots+(n+1)r^{n-1} \\ rS_n &= \qquad 2r+3r^2+\cdots+nr^{n-1}+(n+1)r^n \end{aligned}$$

の差をとると，$r \neq 1$ のとき

$$(1-r)S_n=2+r+r^2+\cdots+r^{n-1}-(n+1)r^n=1+\frac{1-r^n}{1-r}-(n+1)r^n$$

$$\therefore\ \ S_n=\frac{(1-r)+(1-r^n)-(n+1)(1-r)r^n}{(1-r)^2}$$

$n=1$ のとき S_n は等差数列の和となり，以上をまとめると

$$S_n=\begin{cases}\dfrac{1}{2}n(n+3) \\ \dfrac{2-r-(n+2)r^n+(n+1)r^{n+1}}{(1-r)^2}\end{cases} \qquad \text{(答)}$$

(2)
$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{4k^2-1}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k+1)(2k-1)} &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right) \\ &= \frac{n}{2n+1} \qquad \text{(答)}\end{aligned}$$

(3)
$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)} &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k(k+1)}-\frac{1}{(k+1)(k+2)}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right) \\ &= \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)} \qquad \text{(答)}\end{aligned}$$

$\boxed{4}$ **確認**：法則や構造をつかむことが学習目標であるという分野の性格上，Σ の公式

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}n(n+1)$$
$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$
$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$$

を導く過程もまた基本事項ということになる。ポイントは階乗関数の活用にある。

自然数 m に対して

$$f_m(x) = x(x-1)(x-2)\cdots(x-m+1)$$

と表される関数を**階乗関数**という。$f_m(m) = m!$ であることが名前の由来である。階乗関数の最大の特徴は，**階差をとってもまた階乗関数になる**ことであり，

$$f_m(x+1) - f_m(x) = mf_{m-1}(x)$$

が成り立つ。べき関数の微分 ($\rightarrow$ 数学 II) と次数，係数の変化が似ているので，対比させながら計算法を整理しておくとよいだろう。

本問では $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ だけ導くが，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$ の証明も各自でやってみよう。なお，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}n(n+1)$ は等差数列の和である。

解答：

(1)
$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= (n+1)n(n-1) - n(n-1)(n-2) \\ &= n(n-1)\{(n+1)-(n-2)\} \\ &= 3n(n-1) \quad \text{(答)} \end{aligned}$$

(2)
$$\sum_{k=1}^{n} k(k-1) = \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}\Big\{(k+1)k(k-1) - k(k-1)(k-2)\Big\} = \frac{1}{3}(n+1)n(n-1)$$
$$\sum_{k=1}^{n} k(k-1) = \sum_{k=1}^{n} k^2 - \sum_{k=1}^{n} k = \sum_{k=1}^{n} k^2 - \frac{n}{2}(1+n)$$

であるから

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} k^2 &= \frac{1}{3}n(n+1)(n-1) + \frac{1}{2}n(n+1) \\ &= \frac{1}{6}n(n+1)\{2(n-1)+3\} \\ &= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) \end{aligned}$$

(おわり)

$\boxed{5}$ **確認**：**格子点**とは，座標平面(一般には座標空間)において座標成分がすべて整数である点のことをいう。本問は図形的に解くとエレガントではあるが，まずは機械的なΣ計算で解く方法を確認しよう。

解答１：

$2(n-|x|) \geqq |y| \geqq 0$ より

$$-n \leqq x \leqq n$$

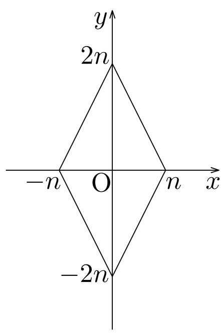
$x=k$ のとき

$$-2(n-|k|) \leqq y \leqq 2(n-|k|)$$

より整数の組 $(x,\ y)$ は $4(n-|k|)+1$ 個あるから，求める個数は

$$\begin{aligned}\sum_{k=-n}^{n}\{4(n-|k|)+1\} &= 4n+1+2\sum_{k=1}^{n}\{4(n-k)+1\} \\ &= 4n+1+2\times\frac{n}{2}\{(4n-3)+1\} \\ &= 4n^2+2n+1 \quad (\text{答})\end{aligned}$$

解答２：



$2|x|+|y| \leqq 2n$ は，右図のひし形の周および内部となる。

$x \geqq 1,\ y \geqq 1,\ 2x+y<2n$ の部分にある格子点の個数 a_nを 2 倍して，$x \geqq 1,\ y \geqq 1,\ 2x+y=2n$ 上にある格子点の個数 $n-1$ を加えると長方形 $1 \leqq x \leqq n-1,\ 1 \leqq y \leqq 2n-1$ の周上および内部にある格子点の個数となるから

$$2a_n+n-1=(n-1)(2n-1)$$

$$a_n=\frac{1}{2}\{(n-1)(2n-1)-(n-1)\}=(n-1)^2$$

$$\therefore\ \ a_n+n-1=(n-1)^2+n-1=n(n-1)$$

対称性と座標軸上に $2(n+2n)+1=6n+1$ 個あることを考えて，求める個数は

$$4\times n(n-1)+6n+1=4n^2+2n+1 \quad (\text{答})$$

(注)　2 つの解法はそれぞれに意義がある。解答 1 では，$x=k$ を固定してΣ記号で表現することにより，数量の把握を容易にする方法論を提示している。解答 2 では，数列の構造を大域的にとらえることの重要性を示唆している。設定が単純な段階で，こうした基本的な感覚はしっかり身につけておきたい。

$\boxed{6}$ **確認**：与えられた数列を**一定の規則で区切ることで全体の構造がとらえやすくなる**とき，その区切って考えられた数列を俗に**群数列**という。群に分けることは構造をつかむための一方法であって，群数列という名前の数列があるわけではない。

群数列の解法上のポイントは，主に

(i) 群の項数の数列を並行して考える

(ii) ひとつ前の群の末項に注目する

の２つである。

解答：

n 番目のグループが，n を初項として n 個の項が含まれるように

$$\{1\},\ \{2,\ 1\},\ \{3,\ 2,\ 1\},\ \{4,\ 3,\ 2,\ 1\},\ \{5,\ 4,\ 3,\ 2,\ 1\},\ \cdots\cdots$$

と区切って考える。

(1) 100 がはじめて現れるのは，100 番目のグループの初項であるから，

$$\sum_{k=1}^{99} k + 1 = \frac{1}{2}\times 99\times 100 + 1 = 4951 \quad \text{(答)}$$

項めである。

(2) 第 1000 項が n 番目のグループに入っているとすれば，

$$\sum_{k=1}^{n-1} k < 1000 \leqq \sum_{k=1}^{n} k$$

$$\therefore\ \ n(n-1) < 2000 \leqq n(n+1)$$

関数 $y = x(x-1)$ は ($x \geqq 1$ において) 単調増加であり，

$$44\times 45 = 1980,\ \ 45\times 46 = 2070$$

であるから，

$$n = 45$$

よって，第 1000 項は 45 番目のグループの $1000 - \dfrac{1}{2}\times 44\times 45 = 10$ 項めであるから，

$$45 - 10 + 1 = 36 \quad \text{(答)}$$

(3) k 番目のグループ内の項の総和は

$$\sum_{j=1}^{k} j = \frac{1}{2}k(k+1)$$

前問の結果を参考にして，第 1000 項までの和は

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{44} \frac{1}{2}k(k+1) + \sum_{j=36}^{45} j \\
&= \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{44}\{k(k+1)(k+2) - (k-1)k(k+1)\} + \sum_{j=36}^{45} j \\
&= \frac{1}{6}\times 44\times 45\times 46 + \frac{10}{2}\times(36+45) \\
&= 15585 \quad \text{(答)}
\end{aligned}$$

$\boxed{7}$ **確認**：数列の増減を調べるには，階差数列の符号変化を調べればよい。原理は

$$a_n < a_{n+1} \iff a_{n+1} - a_n > 0$$

に基づくものであり，ちょうど微分可能な関数の増減を導関数の符号変化から調べるのと全く同様である。正項数列で因数が多い場合は

$$a_{n+1} - a_n > 0 \iff \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$$

と考えて，計算式をスッキリさせることも視野に入れる。

解答：

(1) 数列 $\{a_n\}$ の階差をとって

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= (n+1)^3 - n^3 - 7\{(n+1)^2 - n^2\} - 10(n+1-n) \\ &= 3n^2 + 3n + 1 - 7(2n+1) - 10 \\ &= 3n^2 - 11n - 18 \end{aligned}$$

この式を $f(n)$ とおくと，(2 次関数 $f(x)$ のグラフは下に凸であり，)

$$f(1) = -26 < 0,\quad f(4) = -14 < 0,\quad f(5) = 2 > 0$$

であるから

$$n \leqq 4 \implies f(n) < 0,\quad n \geqq 5 \implies f(n) > 0$$

となる。よって，数列 $\{a_n\}$ の増減は

$$a_1 > a_2 > a_3 > a_4 > a_5 < a_6 < \cdots$$

となり，a_n の最小値は

$$a_5 = 5^3 - 7 \times 5^2 - 10 \times 5 = -100 \quad \text{(答)}$$

(2) $0 \leqq n \leqq 99$ のとき

$$\begin{aligned} \frac{b_{n+1}}{b_n} &= \frac{100 \cdot 99 \cdot \cdots \cdot (100-n)}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{100 \cdot 99 \cdot \cdots \cdot (101-n)} \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{100-n}{n+1} \end{aligned}$$

より

$$\begin{aligned} b_n < b_{n+1} &\iff \frac{b_{n+1}}{b_n} > 1 \\ &\iff 100 - n > 2(n+1) \\ &\iff n < \frac{98}{3} = 32 + \frac{2}{3} \end{aligned}$$

であるから，

$$b_0 < b_1 < b_2 < \cdots < b_{32} < b_{33} > b_{34} > \cdots > b_{100}$$

よって，b_n を最大にする n は

$$n = 33 \quad \text{(答)}$$

$\boxed{8}$ **確認**：$S_n = a_1 + a_2 + \cdots\cdots + a_n$ のとき，$\{a_n\}$ は $\{S_n\}$ の階差数列になる。

$$\begin{array}{rl} & a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n = S_n \\ -) & a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} \qquad\quad = S_{n-1} \\ \hline & \qquad\qquad\qquad\quad a_n = S_n - S_{n-1} \end{array}$$

ただし，$n=1$ のときは $a_1 = S_1$ となって法則に合わないことに注意。まとめると

$$a_n = \begin{cases} S_1 & (n=1) \\ S_n - S_{n-1} & (n \geqq 2) \end{cases}$$

解答：

$n=1$ のとき

$$4a_1 = 4S_1 = {a_1}^2 + 2a_1 + 1$$
$$(a_1 - 1)^2 = 0$$
$$\therefore\ a_1 = 1$$

$n \geqq 2$ のとき

$$4a_n = 4S_n - 4S_{n-1} = (a_n+1)^2 - (a_{n-1}+1)^2$$
$$(a_n - 1)^2 - (a_{n-1}+1)^2 = 0$$
$$(a_n + a_{n-1})(a_n - a_{n-1} - 2) = 0$$

$a_n > 0$，$a_{n-1} > 0$ より $a_n + a_{n-1} \neq 0$ であるから

$$a_n - a_{n-1} = 2$$

よって，$\{a_n\}$ は初項 $a_1 = 1$，公差 2 の等差数列であるから，

$$a_n = 2n - 1 \quad (答)$$

このとき

$$S_n = \frac{1}{4}(a_n + 1)^2 = n^2 \quad (答)$$

$\boxed{9}$ **確認**：階差 $a_{n+1}-a_n$ は，a_n から a_{n+1} への増分を表している。

$a_{n+1}-a_n$ の一般項から a_n の一般項を求めるには，階差数列の性質

$$\sum_{k=1}^{n-1}(a_{k+1}-a_k)=a_n-a_1 \quad (n \geqq 2) \qquad\qquad \to \boxed{3},\ \boxed{4}$$

を用いればよい。

もう一つの基本的な解法としては，$a_{n+1}-a_n$ の一般項も階差の形に直して

$$a_{n+1}-a_n=b_{n+1}-b_n \iff a_{n+1}-b_{n+1}=a_n-b_n$$

により定数数列に帰着させる方法もある。階差の形にするには $\boxed{8}$ を応用する。

解答：

(1) $a_{n+1}-a_n$ は A_{n+1} と A_n との点の個数の差，すなわち A_{n+1} の外側にある点の個数を表すから，

$$a_{n+1}-a_n=4n \quad (答)$$

(2) $n \geqq 2$ のとき

$$a_n-a_1=\sum_{k=1}^{n-1}(a_{k+1}-a_k)=\sum_{k=1}^{n-1}4k=2n(n-1)$$

$a_1=1$ より

$$a_n=2n(n-1)+a_1=2n^2-2n+1$$

この式は $n=1$ のときも成り立つから

$$a_n=2n^2-2n+1 \quad (n \geqq 1) \qquad (答)$$

別解：

$$4n=4\left(\sum_{k=1}^{n}k-\sum_{k=1}^{n-1}k\right)=2n(n+1)-2n(n-1)$$

であるが，これは n についての恒等式であり，$n=1$ のときも成り立つ。これより

$$a_{n+1}-a_n=4n \iff a_{n+1}-n(n+1)=a_n-n(n-1)$$

と変形できるから，$a_n-n(n-1)$ は定数であり，

$$a_n-n(n-1)=a_1-1\times 0=1$$

$$\therefore\ a_n=2n^2-2n+1 \quad (答)$$

$\boxed{10}$ **確認**：漸化式の解法は，原理的には

(ｉ) **階差数列の性質を用いる** → $\boxed{9}$

(ii) **特殊解を求めて等比数列に帰着**させる → $\boxed{10}$，$\boxed{11}$

(iii) 等比数列の漸化式となるように**未知数を設定**する。 → $\boxed{12}$，$\boxed{13}$

(iv) **予想して数学的帰納法**で立証する → $\boxed{15}$

の 4 通りだけである。

本問で確認する(ii)の解法は，2 つの数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ が同じ漸化式を満たすとき，

$$a_{n+1}=ra_n+f(n) \qquad (r \text{ は } 1 \text{ でない定数})$$
$$b_{n+1}=rb_n+f(n)$$

の差をとって等比数列の漸化式

$$a_{n+1}-b_{n+1}=r(a_n-b_n)$$

を導くという方法である。問題はどのようにしてもう一つの数列(特殊解)を見つけるかであるが，それは$\{f(n)\}$と同種の数列から探せばよい。(1)は $f(n)$ が定数(数列)の場合，(2)は $f(n)$ が等差数列の場合，(3)は $f(n)$ が等比数列の場合である。

解答：

(1)
$$a_{n+1}=\frac{2}{3}a_n+1 \qquad \cdots\cdots ①$$

$\alpha=\dfrac{2}{3}\alpha+1$ とおくと $\alpha=3$ であるから，

$$3=\frac{2}{3}\times 3+1 \qquad \cdots\cdots ②$$

① − ② より

$$a_{n+1}-3=\frac{2}{3}(a_n-3)$$

$\{a_n-3\}$ は初項 $a_1-3=-1$，公比 $\dfrac{2}{3}$ の等比数列であるから，

$$a_n-3=-\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \qquad \therefore\ a_n=3-\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \quad (\text{答})$$

(2)
$$a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+n \qquad \cdots\cdots ③$$

等差数列 $\{\alpha n+\beta\}$ で③を満たすものを探すために

$$\alpha(n+1)+\beta=\frac{1}{2}(\alpha n+\beta)+n$$

とおくと，

$$\left(\frac{1}{2}\alpha-1\right)n+\alpha+\frac{1}{2}\beta=0$$

であるから，n についての恒等式とみて係数を比べると

$$\frac{1}{2}\alpha-1=0 \quad \text{かつ} \quad \alpha+\frac{1}{2}\beta=0$$

$$\therefore\ \ \alpha=2,\ \ \beta=-4$$

$$\therefore\ \ 2(n+1)-4=\frac{1}{2}(2n-4)+n \qquad \cdots\cdots ④$$

③ − ④ より

$$a_{n+1}-2(n+1)+4=\frac{1}{2}(a_n-2n+4)$$

$\{a_n-2n+4\}$ は初項 $a_1-2+4=2$，公比 $\dfrac{1}{2}$ の等比数列であるから

$$a_n-2n+4=2\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$\therefore\ \ a_n=2n-4+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} \quad (\text{答})$$

(3)
$$a_{n+1}=3a_n+2^n \qquad \cdots\cdots ⑤$$

等比数列 $\{\alpha\cdot 2^n\}$ で⑤を満たすものを探すために

$$\alpha\cdot 2^{n+1}=3\alpha\cdot 2^n+2^n$$

とおくと，$2^n>0$ より

$$2\alpha=3\alpha+1 \qquad \therefore\ \ \alpha=-1$$

$$\therefore\ \ -2^{n+1}=3(-2^n)+2^n \qquad \cdots\cdots ⑥$$

⑤ − ⑥ より

$$a_{n+1}+2^{n+1}=3(a_n+2^n)$$

$\{a_n+2^n\}$ は初項 $a_1+2=3$，公比 3 の等比数列であるから

$$a_n+2^n=3\cdot 3^{n-1}=3^n$$

$$\therefore\ \ a_n=3^n-2^n \quad (\text{答})$$

(注)　(3)は基本解法の範囲で 2 通りの別解が考えられる。各自で確かめよ。

別解１：⑤の両辺を 2^{n+1} で割ると

$$\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}}=\frac{2}{3}\cdot\frac{a_n}{2^n}+\frac{1}{2}$$

となって，(1)の解法に帰着される。

別解２：⑤の両辺を 3^{n+1} で割ると

$$\frac{a_{n+1}}{3^{n+1}}=\frac{a_n}{3^n}+\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

となって，$\boxed{9}$ の解法に帰着される。

$\boxed{11}$ **確認**：漸化式 $a_{n+1}=f(a_n)$ に対して $\alpha=f(\alpha)$ を満たす α を両辺から引く $\boxed{10}$ (1) の発想を再検証すると,

$$y=f(x) \iff y-\alpha=f(x)-f(\alpha)$$

において整式 $f(x)-f(\alpha)$ が $x-\alpha$ で割り切れることが本質である。このことは $f(x)$ が有理式 (分母・分子が整式である分数式) の場合でも通用する。本問の場合

$$a_{n+1}-\alpha=\frac{c(a_n-\alpha)}{a_n+6}$$

の形になって，逆数をとれば $\boxed{10}$ (1)の解法に帰着させることができる。α にあたる値が 2 つあるときは別の考え方もできる。

建前上は $\boxed{10}$ の応用で解けるのだが，何の経験もなくとっさに思いつける発想とも思えないので，ここでは基本(事前に知っておくべきこと)として扱うことにする。

解答：

(1) $\alpha=\dfrac{4\alpha+8}{\alpha+6}$ より

$$\alpha(\alpha+6)=4\alpha+8\ (\neq 0)$$
$$\alpha^2+2\alpha-8=(\alpha+4)(\alpha-2)=0$$
$$\therefore\ \alpha=-4 \text{ または } \alpha=2$$

$\alpha=-4$ のとき

$$a_{n+1}+4=\frac{4a_n+8+4(a_n+6)}{a_n+6}=\frac{8(a_n+4)}{a_n+6} \quad \text{(答)}$$

$\alpha=2$ のとき

$$a_{n+1}-2=\frac{4a_n+8-2(a_n+6)}{a_n+6}=\frac{2(a_n-2)}{a_n+6} \quad \text{(答)}$$

(2) (1)で導いた 2 式の比をとると

$$\frac{a_{n+1}+4}{a_{n+1}-2}=4\cdot\frac{a_n+4}{a_n-2}$$

これは，公比 4 の等比数列の漸化式を表すから,

$$\frac{a_n+4}{a_n-2}=4^{n-1}\frac{a_1+4}{a_1-2}=4^{n-1}\frac{4+4}{4-2}=4^n$$

$$\therefore\ a_n=\frac{2\cdot 4^n+4}{4^n-1} \quad \text{(答)}$$

(注) (1)で導いた式の逆数をとると

$$\frac{1}{a_{n+1}+4}=\frac{a_n+6}{8(a_n+4)}=\frac{a_n+4+2}{8(a_n+4)}=\frac{1}{8}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{a_n+4}$$
$$\frac{1}{a_{n+1}-2}=\frac{a_n+6}{2(a_n-2)}=\frac{a_n-2+8}{2(a_n-2)}=\frac{1}{2}+4\cdot\frac{1}{a_n-4}$$

となって，$\boxed{10}$ (1)と同じ手順で解くことができる。

$\boxed{12}$ **確認**：行列の理論によると，連立漸化式

$$\begin{cases} a_{n+1} = pa_n + qb_n \\ b_{n+1} = ra_n + sb_n \end{cases} \quad (p,\ q,\ r,\ s \text{ は定数})$$

に対して

$$a_{n+1} + \alpha\, b_{n+1} = \beta(a_n + \alpha\, b_n)$$

を満たす定数 α，β が存在することが知られており，等比数列の漸化式に帰着できる。ただ，その行列の理論自体は大学教養課程の範囲なので，**文字の置き方を覚える**という形で対処する。

解答：

(1) 公比を β とおくと

$$a_{n+1} + \alpha\, b_{n+1} = a_n + b_n + \alpha(4a_n + b_n) = \beta(a_n + \alpha\, b_n)$$

が成り立つから，係数を比べると

$$1 + 4\alpha = \beta \quad \text{かつ} \quad 1 + \alpha = \alpha\beta$$

$$\therefore\ (\alpha,\ \beta) = \left(\frac{1}{2},\ 3\right),\ \left(-\frac{1}{2},\ -1\right)$$

特に

$$\alpha = \pm\frac{1}{2} \quad \text{(答)}$$

(2) (1)より

$$a_{n+1} + \frac{1}{2}b_{n+1} = 3\left(a_n + \frac{1}{2}b_n\right) \quad \cdots\cdots ①$$

$$a_{n+1} - \frac{1}{2}b_{n+1} = -\left(a_n - \frac{1}{2}b_n\right) \quad \cdots\cdots ②$$

①より $\left\{a_n + \frac{1}{2}b_n\right\}$ は公比 3 の等比数列であるから，$a_1 = b_1 = 1$ より

$$a_n + \frac{1}{2}b_n = 3^{n-1}\left(a_1 + \frac{1}{2}b_1\right) = \frac{3^n}{2}$$

同様に，②より

$$a_n - \frac{1}{2}b_n = (-1)^{n-1}\left(a_1 - \frac{1}{2}b_1\right) = -\frac{(-1)^n}{2}$$

これを a_n，b_n についての連立方程式として解いて

$$a_n = \frac{3^n - (-1)^n}{4},\quad b_n = \frac{3^n + (-1)^n}{2} \quad \text{(答)}$$

$\boxed{13}$ **確認**：数列 $\{a_n\}$ の隣接3項間漸化式 $a_{n+2} = pa_{n+1} + qa_n$ ($p,\ q$ は定数) は，2つの数列 $\{a_n\}$，$\{a_{n+1}\}$ についての連立漸化式

$$\begin{cases} a_{n+2} = pa_{n+1} + qa_n \\ a_{n+1} = a_{n+1} \end{cases}$$

とみなせるので，$\boxed{12}$ と同じ考え方が通用する。少し工夫して

$$a_{n+2} - \alpha a_{n+1} = \beta(a_{n+1} - \alpha a_n)$$

とおくと，$\alpha,\ \beta$ について対称となって処理しやすくなる。$\alpha,\ \beta$ が求まると

$$a_{n+1} - \alpha a_n = b^{n-1}(a_2 - \alpha a_1)$$

となって $\boxed{10}$ (3)に帰着されるが，$\alpha \neq \beta$ のときは下の解答のように処理する方が楽である。

解答：

(1) $a_{n+2} - \alpha a_{n+1} = \beta(a_{n+1} - \alpha a_n)$ とおくと

$$\alpha + \beta = 2,\quad \alpha\beta = -1$$

$\alpha,\ \beta$ を2解とする x の2次方程式は

$$(x-\alpha)(x-\beta) = x^2 - 2x - 1 = 0$$

であるから，解の公式より

$$(\alpha,\ \beta) = (1 \pm \sqrt{2},\ 1 \mp \sqrt{2})\ \text{(複号同順)}$$

$\{a_{n+1} - \alpha a_n\}$ は公比 β の等比数列であるから，

$$\begin{aligned} a_{n+1} - (1+\sqrt{2})a_n &= (1-\sqrt{2})^{n-1}\left\{a_2 - (1+\sqrt{2})a_1\right\} \\ &= (1-\sqrt{2})^{n-1}(2 - 1 - \sqrt{2}) \\ &= (1-\sqrt{2})^n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{n+1} - (1-\sqrt{2})a_n &= (1+\sqrt{2})^{n-1}\left\{a_2 - (1-\sqrt{2})a_1\right\} \\ &= (1+\sqrt{2})^{n-1}(2 - 1 + \sqrt{2}) \\ &= (1+\sqrt{2})^n \end{aligned}$$

2式から “a_{n+1}” を消去すると

$$a_n = \frac{(1+\sqrt{2})^n - (1-\sqrt{2})^n}{2\sqrt{2}}\quad \text{(答)}$$

(2) $a_{n+2} - \alpha a_{n+1} = \beta(a_{n+1} - \alpha a_n)$ とおくと $\alpha = \beta = 3$ であるから，

$$a_{n+2} - 3a_{n+1} = 3(a_{n+1} - 3a_n)$$

$$a_{n+1} - 3a_n = 3^{n-1}(a_2 - 3a_1) = -3^{n-1}$$

$$\frac{a_{n+1}}{3^{n+1}} - \frac{a_n}{3^n} = -\frac{1}{9}$$

よって，$\left\{\dfrac{a_n}{3^n}\right\}$ は初項 $\dfrac{a_1}{3} = \dfrac{1}{3}$，公差 $-\dfrac{1}{9}$ の等差数列であるから，

$$\frac{a_n}{3^n} = \frac{1}{3} - \frac{1}{9}(n-1) = \frac{4-n}{9}$$

$$\therefore\ a_n = 3^{n-2}(4-n)\quad \text{(答)}$$

$\boxed{14}$ **確認：数学的帰納法とはドミノ倒しの原理で証明する論法**で，自然数 n に関する命題 $P(n)$ を示すには

(Ⅰ) $P(1)$ が成り立つ

(Ⅱ) $P(1),\ P(2),\ \cdots,\ P(k)$ が成り立つならば $P(k+1)$ が成り立つ

の2つを示せばよいというものである。実際に証明するときには，状況に応じて $n=2$ から始めたり，$P(k)$ の仮定だけで $P(k+1)$ を導いたり，と臨機応変に対処する。**あらかじめ (Ⅱ) の部分の式変形を下書き**した上で答案を書くと整理しやすいであろう。

本問の問題文には「数学的帰納法で解け」という指示がないので，数学的帰納法を用いるかどうかも考察の一部である。用いるのであれば，「n についての数学的帰納法で示す」と方針を明記する方がよい。一方で，数学的帰納法は軽い内容を示す場合でも書く分量が多いという問題点があるので，**場合によっては数学的帰納法を回避することもポイント**となる。

解答：

題意の不等式が成り立つことを，n についての数学的帰納法で証明する。

(Ⅰ) $n=2$ のときは

$$(\text{左辺})=\frac{1}{1^3}+\frac{1}{2^3}=\frac{9}{8},\quad (\text{右辺})=2-\frac{1}{2^2}=\frac{7}{4}=\frac{14}{8}$$

であるから成り立つ。

(Ⅱ) k を 2 以上の自然数として

$$\frac{1}{1^3}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\cdots\cdots+\frac{1}{k^3}<2-\frac{1}{k^2}$$

が成り立つとすれば,

$$\frac{1}{1^3}+\frac{1}{2^3}+\cdots\cdots+\frac{1}{k^3}+\frac{1}{(k+1)^3}<2-\frac{1}{k^2}+\frac{1}{(k+1)^3} \qquad \cdots\cdots ①$$

ところで,

$$2-\frac{1}{(k+1)^2}-\left\{2-\frac{1}{k^2}+\frac{1}{(k+1)^3}\right\}=\frac{-k^2(k+1)+(k+1)^3-k^2}{k^2(k+1)^3}$$
$$=\frac{k^2+3k+1}{k^2(k+1)^3}>0 \qquad \cdots\cdots ②$$

であるから，①かつ②より $n=k+1$ のときも成り立つ。

(Ⅰ), (Ⅱ) より 2 以上のすべての自然数 n に対して成立する。　(証明おわり)

別解：

$k\geqq 2$ のとき

$$\frac{1}{(k-1)^2}-\frac{1}{k^2}-\frac{1}{k^3}=\frac{k^3-k(k-1)^2-(k-1)^2}{k^3(k-1)^2}=\frac{k^2+k-1}{k^3(k-1)^2}>0$$

であるから

$$\frac{1}{k^3}<\frac{1}{(k-1)^2}-\frac{1}{k^2}$$

両辺を k について 2 から n まで加えて，さらに両辺に 1 を加えると証明が終わる。

$\boxed{15}$ **確認**：$\boxed{10}$で確認したように，式変形で漸化式を解く方法は3タイプしかない。それ以外のものは実験して予想を立てるしかないが，予想だけでは解いたことにはならない。例えば，$\boxed{12}$(2)の解は $a_1 = 1,\ a_2 = 2,\ a_3 = 3$ を満たすが，一般項は $a_n = n$ ではない。

そこで，数学的帰納法を用いて予想が正しい(すべての自然数について成り立つ)ことを立証しなければならない。

解答：

(1) 漸化式に $n = 1$ を代入して

$$(a_2 - 2)^2 = 2(a_2 + 2)$$
$$a_2{}^2 - 6a_2 = a_2(a_2 - 6) = 0$$

$a_2 > a_1 = 2$ より

$$a_2 = 6 \quad (\text{答})$$

漸化式に $n = 2$ を代入して

$$(a_3 - 6)^2 = 2(a_3 + 6)$$
$$a_3{}^2 - 14a_3 + 24 = (a_3 - 2)(a_3 - 12) = 0$$

$a_3 > a_2 = 6$ より

$$a_3 = 12 \quad (\text{答})$$

漸化式に $n = 3$ を代入して

$$(a_4 - 12)^2 = 2(a_4 + 12)$$
$$a_4{}^2 - 26a_4 + 120 = (a_4 - 6)(a_4 - 20) = 0$$

$a_4 > a_3 = 12$ より

$$a_4 = 20 \quad (\text{答})$$

(2) (1)より

$$a_n = n(n + 1)$$

と予想できる。この予想が正しいことを n についての数学的帰納法で示す。

$n = 1$ のときは既に成立。$a_k = k(k + 1)$ $(k \geqq 1)$ とすれば，

$$\{a_{k+1} - k(k + 1)\}^2 = 2\{a_{k+1} + k(k + 1)\}$$
$$a_{k+1}{}^2 - (2k^2 + 2k + 2)a_{k+1} + k(k + 1)(k^2 + k - 2) = 0$$
$$\{a_{n+1} - (k + 1)(k + 2)\}\{a_{k+1} - k(k - 1)\} = 0$$

$a_{k+1} > a_k = k(k + 1)$ より

$$a_{k+1} = (k + 1)(k + 2)$$

よって，上の予想が正しいことが示され，求める一般項は

$$a_n = n(n + 1) \quad (\text{答})$$

$\boxed{16}$ **確認**：数列 $\{a_n\}$ において，項の番号 n を限りなく大きくするとき，a_n が一定値 α に近づくならば，$\{a_n\}$ は α に**収束する**といい，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ と表す。$\{a_n\}$ が収束しないとき，$\{a_n\}$ は**発散する**という。$n\to\infty$ は「n が限りなく大きくなる」ことを表す記号であり，∞ は値ではないことに注意する。実際に極限を求める際には,

$$\boldsymbol{\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0}$$

を公理として，**不定形の型に応じて変形**することが基本となる。

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$ は直感的イメージと合致するが，実はこれを否定しても何の矛盾も生じない。証明できないのに明らかだと感じるのは，はじめからそれを前提として(実数の公理のもとで)理論を構築してきたからである。

不定形とは，そのままでは収束・発散が判断できないような式の形のことである。不定形には大きく 5 つの型があり，その型ごとに処理の仕方が決まってくる；

$\dfrac{0}{0}$: 微分係数の極限(関数の極限)でおなじみの型ではあるが，数列の極限ではあまり見られない。分母・分子を共通因数で割ることが基本である。

$\dfrac{\infty}{\infty}$: (1)〜(4)のようなタイプで，分母・分子を同次のべきで割ることが基本である。(2)に現れる 2 次式の平方根や 3 次式の立方根は, 1 次式とみなして処理すればよい。(3)のように分母と分子で次数が異なる場合は，(分母と分子の最高次の項のうち) **次数の低い方で割る**とそのあとの処理がしやすい。

$0\times\infty$: $\boxed{17}$(1)で扱うような型であり，数学 II で登場する関数の性質や公式を用いて他の不定形に帰着させることになる。
$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sin\frac{n}{5}\pi$ は正の無限大や負の無限大に発散するわけではないが，便宜上 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{n}{5}\pi$ はこの型に分類される。

$\infty-\infty$: 一般論は存在しないが，受験対策としては (5) のように分子の有理化により $\frac{\infty}{\infty}$ に帰着させるタイプと平均値の定理を用いるタイプに注意すればよい。平均値の定理については,「微分法」のファイルで扱う。

1^∞ : 自然対数の底 $e=\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ と結びつくものに限られる。
「微分法」のファイルで扱い，このファイルでは扱わない。

不定形を解消したあとは，収束する数列の極限の性質を用いる。
$\{a_n\}$がαに収束し，$\{b_n\}$がβに収束するとき

$$\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\alpha+\beta,\quad \lim_{n\to\infty}ka_n=k\alpha\ \ (k\text{ は実数定数})$$

$$\lim_{n\to\infty}a_nb_n=\alpha\beta,\quad \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\frac{\alpha}{\beta}$$

が成り立つが，これらは高校数学の範囲では証明できないので，認めて用いる。

解答：

(1) $$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2-5n-6}{3n^2+4n+5}=\lim_{n\to\infty}\frac{2-\dfrac{5}{n}-\dfrac{6}{n^2}}{3+\dfrac{4}{n}+\dfrac{5}{n^2}}=\frac{2}{3}\quad\text{(答)}$$

(2) $$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{5n^2-1}+7n}{\sqrt[3]{8n^3+3n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{5-\dfrac{1}{n^2}}+7}{\sqrt[3]{8+\dfrac{3}{n^2}}}=\frac{7+\sqrt{5}}{2}\quad\text{(答)}$$

(3) $$\lim_{n\to\infty}\frac{n^3+9n^2+3}{5n^2-2n+6}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+9+\dfrac{3}{n^2}}{5-\dfrac{2}{n}+\dfrac{6}{n^2}}=\infty\ \text{(正の無限大に発散)}\quad\text{(答)}$$

(4) $$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}k^2=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{6}\cdot1\cdot2=\frac{1}{3}\quad\text{(答)}$$

(5) $$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+3n}-\sqrt{n^2-3n}\,\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{(n^2+3n)-(n^2-3n)}{\sqrt{n^2+3n}+\sqrt{n^2-3n}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{6n}{\sqrt{n^2+3n}+\sqrt{n^2-3n}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{6}{\sqrt{1+\dfrac{3}{n}}+\sqrt{1-\dfrac{3}{n}}}$$
$$=\frac{6}{1+1}=3\quad\text{(答)}$$

$\boxed{17}$ **確認**： 数列の極限について，一般に

1° $\boldsymbol{a_n \leqq c_n \leqq b_n \ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots),\ \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \alpha}$

ならば，$\boldsymbol{\lim_{n\to\infty} c_n = \alpha}$

2° $\boldsymbol{a_n \leqq b_n \ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots),\ \lim_{n\to\infty} a_n = +\infty}$

ならば，$\boldsymbol{\lim_{n\to\infty} b_n = +\infty}$

が成り立つ。1° の原理は**ハサミウチの原理**，2° の原理は**追い出しの原理**と呼ばれる。ここで成り立つことは，**大小関係が入れ替わらない**というだけであり，つねに $a_n < b_n$ だからといって $\lim_{n\to\infty} a_n < \lim_{n\to\infty} b_n$ であるとは限らない。たとえば，つねに $\dfrac{1}{n} > 0$ ではあるが，$\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ であって正ではない。

(1) $\left|\sin \dfrac{n}{5}\pi\right| \leqq 1$ を用いてハサミウチを行なう。

(2) $|(-1)^{n+1}| = 1$ を用いてハサミウチを行なう。

(3) n^3 の発散速度は n^2，n より速いから，$\lim_{n\to\infty}(n^3-3n^2-9n)$ は正の無限大に発散することが予想される。発散することがはっきりわかる式で下から評価する。

解答：

(1) $-1 \leqq \sin\dfrac{n}{5}\pi \leqq 1$ より

$$-\frac{1}{n} \leqq \frac{1}{n}\sin\frac{n}{5}\pi \leqq \frac{1}{n}$$

であり，$\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{n} = 0$ であるから，ハサミウチの原理より

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{n}{5}\pi = 0 \quad (答)$$

(2) $a_n = \left|(-1)^{n+1}\sqrt{n+1} + (-1)^n\sqrt{n}\,\right|$ とおくと

$$-a_n \leqq (-1)^{n+1}\sqrt{n+1} + (-1)^n\sqrt{n} \leqq a_n$$

であり，

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty}\left|(-1)^{n+1}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\,\right)\right| \\ &= \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\,\right) \\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = 0\end{aligned}$$

であるから，ハサミウチの原理より

$$\lim_{n\to\infty}\left\{(-1)^{n+1}\sqrt{n+1} + (-1)^n\sqrt{n}\,\right\} = 0 \quad (答)$$

(3) n^3-3n^2-9n を，下から発散が明確な式で評価する。

$$(n^3-3n^2-9n)-n=n(n^2-3n-10)=n\{n(n-3)-10\}$$

より，$n \geqq 6$ のとき

$$n-3 \geqq 3,\quad n(n-3) \geqq 6\times 3=18>10$$

であるから，

$$n^3-3n^2-9n>n \quad (n \geqq 6)$$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} n=+\infty$ であるから，追い出しの原理より

$$\lim_{n\to\infty}(n^3-3n^2-9n)=+\infty \quad (答)$$

$\boxed{18}$ **確認**：等比数列の極限について，基本的な知識を確認する。ここで，示したことは今後公式として用いられるので，しっかり覚えておこう。先にまとめをしておく。

$$\lim_{n\to\infty} r^n = \begin{cases} 0 & (-1<r<1) \\ 1 & (r=1) \\ +\infty & (r>1) \\ \text{振動} & (r \leqq -1) \end{cases}$$

$$r>1 \text{ のとき } \lim_{n\to\infty}\frac{r^n}{n}=+\infty,\quad -1<r<1 \text{ のとき } \lim_{n\to\infty} nr^n = 0$$

解答：

(1) $h>0$, $n \geqq 2$ のとき，二項定理を用いると

$$(1+h)^n = \sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k h^k > {}_n\mathrm{C}_2 h^2 = \frac{n(n-1)}{2}h^2$$

であり，$n=1$ のときも

$$1+h > 0 = \frac{1\cdot(1-1)}{2}h^2$$

となって成り立つ。　　(おわり)

(2) $r>1$ のとき $r=1+h$ $(h>0)$ と表されるから，(1)より

$$r^n \geqq \frac{r^n}{n} = \frac{(1+h)^n}{n} > \frac{n-1}{2}h^2$$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{2}h^2=+\infty$ であるから，追い出しの原理より

$$\lim_{n\to\infty} r^n = +\infty,\quad \lim_{n\to\infty}\frac{r^n}{n}=+\infty$$

(おわり)

(3) $-1<r<1$ のとき

$$|r| = \frac{1}{1+h}\quad (h>0)$$

と表されるから，(1)より

$$0 \leqq |r^n| \leqq |nr^n| = n|r|^n = \frac{n}{(1+h)^n} < \frac{2}{(n-1)h^2}$$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2}{(n-1)h^2}=0$ であるから，ハサミウチの原理より

$$\lim_{n\to\infty} r^n = 0,\quad \lim_{n\to\infty} nr^n = 0$$

(おわり)

$\boxed{19}$ **確認**：本問では，漸化式で定義された数列の極限を求める方法を確認する。

(1), (2)のように漸化式が解ける場合は，$\boxed{9}$, $\boxed{10}$で確認した解法に従って，まず一般項を求めればよい。

漸化式が解けない場合は，$0 < r < 1$ を満たす定数 r を用いて

$$|a_{n+1} - \alpha| \leqq r|a_n - \alpha|$$

の形に整理して，等比数列の一般項を求めるのと同様の考え方で

$$|a_n - \alpha| \leqq r^{n-1}|a_1 - \alpha|$$

を導くことが基本である。ここで，α は収束する場合の極限を表すから，与えられた漸化式において $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ と仮定して，必要条件として求めることができる。収束が証明されるまでは極限値であるとは言えないので，**仮想極限**と呼ばれる。

なお，(3)の漸化式は$\boxed{11}$の解法により一般項は求められるが，極限だけ求めるなら，評価してハサミウチをする方が労力が少なくて済む。(5)は定まった解法では評価できないので，実験するなどしてうまい評価を見つけ出すことになる。

解答：

(1)
$$a_{n+1} = \frac{2}{3}a_n + 3 \qquad \cdots\cdots ①$$

$\alpha = \dfrac{2}{3}\alpha + 3$ とおいて方程式を解くと $\alpha = 9$ が得られるから，

$$9 = \frac{2}{3} \times 9 + 3 \qquad \cdots\cdots ②$$

① − ② より

$$a_{n+1} - 9 = \frac{2}{3}(a_n - 9)$$

$\{a_n - 9\}$ は初項 $a_1 - 9 = -8$，公比 $\dfrac{2}{3}$ の等比数列であるから，

$$a_n - 9 = -8\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \qquad \therefore\ a_n = 9 - 8\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

$0 < \dfrac{2}{3} < 1$ より

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = 0$$

であるから，極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ は収束し，

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 9 \quad (答)$$

(2)
$$a_{n+1} = \frac{3}{2}a_n - 3 \qquad \cdots\cdots ③$$

$\alpha = \dfrac{3}{2}\alpha - 3$ とおいて方程式を解くと $\alpha = 6$ が得られるから，

$$6 = \frac{3}{2} \times 6 - 3 \qquad \cdots\cdots ④$$

③ − ④ より

$$a_{n+1}-6=\frac{3}{2}(a_n-6)$$

$\{a_n-6\}$ は初項 $a_1-6=-5$，公比 $\dfrac{3}{2}$ の等比数列であるから

$$a_n-6=-5\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} \qquad \therefore\ a_n=6-5\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$$

$\dfrac{3}{2}>1$ より $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}=+\infty$ であるから，

$$\lim_{n\to\infty}a_n=-\infty \quad \text{(答)}$$

(3) 数列 $\{a_n\}$ が α に収束するとすれば，

$$\alpha=\frac{\alpha+2}{\alpha+1}$$

$$\alpha(\alpha+1)=\alpha+2 \qquad \therefore\ \alpha^2=2$$

$a_1=1$ および $a_n>0 \Longrightarrow a_{n+1}>0$ より，つねに $a_n>0$ であるから

$$\alpha=\sqrt{2}$$

漸化式の両辺から $\sqrt{2}$ を引くと

$$a_{n+1}-\sqrt{2}=\frac{a_n+2-\sqrt{2}\,(a_n+1)}{a_n+1}=\frac{(1-\sqrt{2}\,)(a_n-\sqrt{2}\,)}{a_n+1}$$

$a_n>0$ より

$$\left|\frac{1-\sqrt{2}}{a_n+1}\right|=\frac{\sqrt{2}-1}{a_n+1}<\sqrt{2}-1$$

であるから，

$$\left|a_{n+1}-\sqrt{2}\,\right|<(\sqrt{2}-1)\left|a_n-\sqrt{2}\,\right|$$

等比数列の一般項を求める要領と同様にして

$$\left|a_n-\sqrt{2}\,\right|<(\sqrt{2}-1)^{n-1}\left|a_1-\sqrt{2}\,\right|$$

$0<\sqrt{2}-1<1$ より

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{2}-1)^{n-1}=0$$

であるから，ハサミウチの原理より

$$\lim_{n\to\infty}(a_n-\sqrt{2}\,)=0$$

$a_n=(a_n-\sqrt{2}\,)+\sqrt{2}$ より

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}(a_n-\sqrt{2}\,)+\sqrt{2}=\sqrt{2} \quad \text{(答)}$$

(4) $\alpha=\sqrt{\alpha+2}$ とおくと,

$$\alpha^2=\alpha+2$$
$$\alpha^2-\alpha-2=0$$
$$(\alpha+1)(\alpha-2)=0$$

$\alpha>0$ より

$$\alpha=2$$

漸化式の両辺から 2 を引くと

$$a_{n+1}-2=\sqrt{a_n+2}-2=\frac{(a_n+2)-4}{\sqrt{a_n+2}+2}=\frac{1}{\sqrt{a_n+2}+2}(a_n-2)$$

$a_n>0$ より

$$0<\frac{1}{\sqrt{a_n+2}+2}<\frac{1}{2}$$

であるから,

$$|a_{n+1}-2|<\frac{1}{2}|a_n-2|$$

等比数列の一般項を求める要領と同様にして

$$|a_n-2|<\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}|a_1-2|$$

$0<\dfrac{1}{2}<1$ より

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=0$$

であるから，ハサミウチの原理より

$$\lim_{n\to\infty}|a_n-2|=0 \qquad \therefore\ \lim_{n\to\infty}a_n=2 \quad (答)$$

(5) はじめの何項かを求めてみると

$$a_2=1+a_1=2,\quad a_3=1+\frac{a_2}{2}=2,\quad a_4=1+\frac{a_3}{3}=\frac{5}{3},\ \cdots\cdots$$

であり，$1\leqq a_k\leqq 2$ $(k\geqq 2)$ とすると

$$1\leqq a_{k+1}=1+\frac{a_k}{k}\leqq 1+\frac{2}{k}\leqq 2$$

であるから，数学的帰納法により

任意の自然数 n に対して $1\leqq a_n\leqq 2$

が成り立つ。与えられた漸化式より

$$1\leqq a_{n+1}=1+\frac{a_n}{n}\leqq 1+\frac{2}{n}$$

であり，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}=0$ であるから，ハサミウチの原理より

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}a_{n+1}=1 \quad (答)$$

$\boxed{20}$ **確認**：数列 $\{a_n\}$ の各項を順に記号 $+$ で結んだ

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots\cdots + a_n + \cdots\cdots$$

を考え，これを**無限級数**という。しかし，「無限にどんどん足していく」といったあいまいなものではなく，**有限部分和** $\sum_{k=1}^{n} a_k$ の極限として定義される；

$$\boldsymbol{\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_k}$$

収束・発散の議論は，公式または $\boxed{3}$ で確認した技巧により有限部分和を求めた上で，数列の極限に従うことになる。収束するときの極限値は**和**という。(4)のように，有限部分和 S_n を求めるのに場合分けが必要な場合は，それぞれの部分和がすべて同じ値に収束するときに限って収束すると考える。一般に，

$$\lim_{n\to\infty} a_n \text{ が収束} \iff \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} a_{2n} = \alpha \text{ が収束} \\ \lim\limits_{n\to\infty} a_{2n-1} = \beta \text{ が収束} \\ \alpha = \beta \end{cases}$$

無限級数 $\boldsymbol{\sum_{n=1}^{\infty} a_n}$ が収束するとき，$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_n$ とおくと $a_n = S_n - S_{n-1}$ $(n \geqq 2)$ であるから，収束する極限の性質より

$$\boldsymbol{\lim_{n\to\infty} a_n} = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} \boldsymbol{= 0}$$

が成り立つ。対偶をとることにより

$$\boldsymbol{\lim_{n\to\infty} a_n = 0} \textbf{ でないならば } \boldsymbol{\sum_{n=1}^{\infty} a_n} \textbf{ は発散する}$$

ことも成り立つことがわかる。ただし，**$\boldsymbol{\lim_{n\to\infty} a_n = 0}$ であっても $\boldsymbol{\sum_{n=1}^{\infty} a_n}$ が収束するとは限らない**ことに注意する。(2)がその反例の一つになっている。

解答：

(1)
$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \left\{ \frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)} \right\} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{1\cdot 2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right\} = \frac{1}{4} \quad \text{(答)}\end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \log_2\left(1 + \frac{1}{n}\right) &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \log_2\left(1 + \frac{1}{k}\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \{\log_2(k+1) - \log_2 k\} \\ &= \lim_{n\to\infty} \{\log_2(n+1) - \log_2 1\} = +\infty \quad \text{(答)}\end{aligned}$$

(3) $\dfrac{2}{3}+\dfrac{4}{5}+\dfrac{6}{7}+\dfrac{8}{9}+\dfrac{10}{11}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n}{2n+1}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{2n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{2+\frac{1}{n}}=1\neq 0$$

であるから,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{2n+1}\ \text{は発散する}\quad\text{(答)}$$

(4) 無限級数 $\dfrac{2}{3}-\dfrac{2}{3}+\dfrac{4}{5}-\dfrac{4}{5}+\dfrac{6}{7}-\dfrac{6}{7}+\cdots$ の第 n 項までの部分和を S_n とすると

$$S_{2n}=\frac{2}{3}-\frac{2}{3}+\frac{4}{5}-\frac{4}{5}+\cdots+\frac{2n}{2n+1}-\frac{2n}{2n+1}=0$$

$$S_{2n-1}=S_{2n}+\frac{2n}{2n+1}=0+\frac{2}{2+\frac{1}{n}}\longrightarrow 1\quad(n\to\infty)$$

となるから $\lim_{n\to\infty}S_n$ は発散するから,

$$\text{無限級数}\ \frac{2}{3}-\frac{2}{3}+\frac{4}{5}-\frac{4}{5}+\frac{6}{7}-\frac{6}{7}+\cdots\ \text{は発散}\quad\text{(答)}$$

$\boxed{21}$ **確認**：無限級数の中で，一般項が等比数列になっているものを**無限等比級数**と呼び，少し詳しく学ぶことになっている。特に，$\boxed{18}$で確認した等比数列の極限を基礎とする収束に関する公式 $\big(\to(1)\big)$と無限循環小数が重要である。

解答：

(1) 有限部分和は

$$\sum_{k=1}^{n} ar^{k-1} = \begin{cases} na & (r=1) \\ \dfrac{a(1-r^n)}{1-r} & (r \neq 1) \end{cases}$$

であり，等比数列の極限は

$$\lim_{n\to\infty} r^{n-1} = \begin{cases} 1 & (r=1) \\ 0 & (-1<r<1) \\ \text{発散} & (\text{その他}) \end{cases}$$

であるから，無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} ar^{k-1}$ が収束するための条件は

$$a=0 \ \text{ または } \ -1<r<1 \quad (\text{答})$$

(2) まず，2 つの無限等比級数を個別に調べる。$0<\dfrac{2}{5}<1$ および $0<\dfrac{3}{5}<1$ より 2 つの無限等比数列はそれぞれ収束し，

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{5}\right)^n = \frac{\frac{2}{5}}{1-\frac{2}{5}} = \frac{2}{3}, \quad \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^n = \frac{\frac{3}{5}}{1-\frac{3}{5}} = \frac{3}{2}$$

収束する極限の性質より

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+3^n}{5^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left(\frac{2}{5}\right)^n + \left(\frac{3}{5}\right)^n\right\} = \frac{2}{3}+\frac{3}{2} = \frac{13}{6}$$

(3) $0<\dfrac{1}{100}<1$ より循環小数 $0.1\dot{2}\dot{3}$は収束し，

$$\begin{aligned} 0.1\dot{2}\dot{3} &= 0.1 + 0.023\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{100}\right)^{n-1} \\ &= \frac{1}{10} + \frac{23}{1000}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{100}} \\ &= \frac{1}{10} + \frac{23}{990} \\ &= \frac{122}{990} \quad (\text{答}) \end{aligned}$$