等しい質量 m をもった 2 つの物体 A，B を，自然の長さ l_0，ばね定数 k の質量が無視できる丈夫なばねで連結し，図 1 のように B を下にして静かに水平面上に置いた。重力加速度の大きさを g として，以下の問題に答えよ。

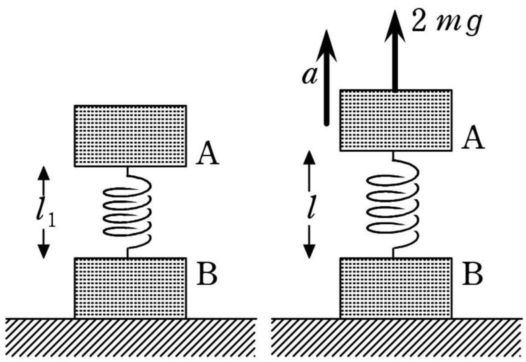

図 1　　図 2

〔A〕 物体 A，B とばねは，図 1 のようなつりあい状態にある。

(1) このときのばねの長さ l_1 を求めよ。

(2) ばねにたくわえられている弾性力の位置エネルギーはいくらか。

(3) B にはたらく垂直抗力はいくらか。

〔B〕 次に，鉛直上向きの一定の力 $2mg$ をはたらかせて物体 A を引っぱりあげると，A は初速度 0 で運動を始める。

(4) 図 2 は，A が加速度 a で運動していて B はまだ静止の状態にある状況を示したものである。このときのばねの長さを l として，A に対するニュートンの運動方程式を書け。

(5) このとき，B にはたらいている垂直抗力はいくらか。

〔C〕 力を加えつづけていると，やがて B が動き始める。

(6) B が動き出す瞬間のばねの長さ l_2 はいくらか。

(7) A に $2mg$ の力を加え始めてから B が動き出す瞬間までに，この力がA にする仕事 W はいくらか。

(8) A に力を加え始めてから B が動き出す瞬間までの，重力による A の位置エネルギーの増加量 ΔV_A を求めよ。

(9) A に力を加え始めてから B が動き出す瞬間までの，ばねにたくわえられた弾性力の位置エネルギーの増加量 ΔV はいくらか。

(10) B が動き出す瞬間の A の速さを v_0 とするとき，文字 W，ΔV_A，ΔV 等を使って，力学的エネルギーの変化と A に加えた力がした仕事との間になりたつ関係式を書け。

解説

〔A〕 物体Aにはたらく力は，重力 mg と上向きのばねの復元力 $k(l_0-l_1)$ である。

(1) Aの力のつりあいから

$$k(l_0-l_1)-mg=0 \quad より$$

$$l_1=\boldsymbol{l_0-\frac{mg}{k}}$$

(2) 弾性力による位置エネルギー $E_k=\frac{1}{2}kx^2$

$$E_k=\frac{1}{2}k(l_0-l_1)^2=\frac{1}{2}k\left(\frac{mg}{k}\right)^2=\boldsymbol{\frac{m^2g^2}{2k}}$$

(3) Bには重力 mg と復元力 $k(l_0-l_1)$ が下向きに，垂直抗力 N が上向きにはたらく。

$$N-mg-k(l_0-l_1)=0 \quad より$$

$$N=mg+k(l_0-l_1)=\boldsymbol{2mg}$$

〔B〕 (4) Aには力 $2mg$ と，復元力 $k(l_0-l)$ が上向きに，重力 mg が下向きにはたらく。運動方程式は

$$\boldsymbol{ma=2mg+k(l_0-l)-mg}$$

ばねが自然の長さより伸びているとすれば，復元力 $k(l-l_0)$ は下向きにはたらく。

(5) Bには重力 mg と復元力 $k(l_0-l)$ が下向きに，垂直抗力 N が上向きにはたらき，静止の状態だからこれら3力はつりあっている。

$$N-mg-k(l_0-l)=0$$

ゆえに　$N=\boldsymbol{mg+k(l_0-l)}$

〔C〕 (6) Bが動き出す瞬間の垂直抗力 N は0であるから，(5)より　$0=mg+k(l_0-l_2)$

ゆえに　$l_2=\boldsymbol{l_0+\frac{mg}{k}}$

(7) 力を加え始めてから動き出すまでに物体Aが移動した距離 Δx は

$$\Delta x=l_2-l_1=\frac{2mg}{k}$$

$2mg$ の力がした仕事 W は，$W=Fx$ より

$$W=2mg\cdot\frac{2mg}{k}=\boldsymbol{\frac{4m^2g^2}{k}}$$

(8) Aは Δx 上昇したから

$$\Delta V_{\mathrm{A}}=mg\cdot\Delta x=\boldsymbol{\frac{2m^2g^2}{k}}$$

(9) Bが動き出す瞬間の弾性力による位置エネルギー E_k' は

$$E_k'=\frac{1}{2}k(l_0-l_2)^2=\frac{1}{2}k\left(\frac{mg}{k}\right)^2=\frac{m^2g^2}{2k}$$

ゆえに　$\Delta V=E_k'-E_k=\boldsymbol{0}$

(10) (始めの全力学的エネルギー)+(仕事)=(あとの全力学的エネルギー)　より

$$\boldsymbol{0+W=\Delta V_{\mathrm{A}}+\Delta V+\frac{1}{2}m{v_0}^2}$$