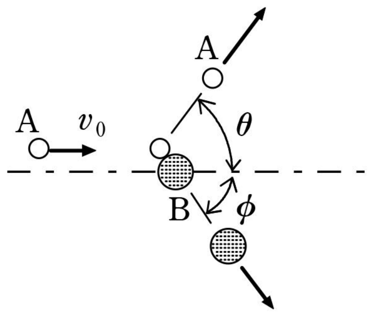
次の $\boxed{1}$ ～ $\boxed{5}$ を適当な式で埋め，また $\boxed{ア}$ ～ $\boxed{オ}$ は選択肢の中から適切なものを選べ。



粒子 A (質量 M_1) が初速 v_0 で，静止している粒子 B(質量 M_2) に弾性衝突する場合を考える。衝突後，粒子 A は進行方向に対して θ 方向に，粒子 B は ϕ 方向に進んだ(図参照)。弾性衝突のため，衝突前後のエネルギーと運動量は保存される。衝突後の粒子 A，粒子 B の速度の大きさを各々 v_1，v_2 とすると，

$$M_1 v_0 = \boxed{1} \quad \cdots\cdots \text{(a)}, \quad M_1 v_1 \sin\theta = \boxed{2} \quad \cdots\cdots \text{(b)}, \quad \frac{M_1 {v_0}^2}{2} = \boxed{3} \quad \cdots\cdots \text{(c)}$$

が得られる。

以上の条件で，角度 θ と ϕ の取りうる値の範囲を考える。式 (a)，(b)，(c) より ϕ，v_2 を消去すると v_1 に関する 2 次式が得られる。これより $\dfrac{M_1}{M_2} = R$ として v_1 を v_0，θ，R によって表すと，$R < 1$ の場合には $v_1 = \boxed{4}\, v_0$ ……(d)

となる。

次に衝突後の粒子 B の挙動について考える。まず，式 (a)と (b) より θ を消去し，さらに (c) 式より v_1 を消去して，v_0，ϕ，R によって表せば $v_2 = \boxed{5}\, v_0$ …… (e)

が得られる。

以上の議論より，粒子 A の質量が粒子 B の質量より軽い場合，角度 θ と ϕ の取りうる範囲は $0° \leqq \theta \leqq \boxed{ア}°$，および $0° \leqq \phi \leqq \boxed{イ}°$ である。粒子 A の質量が粒子 B の質量の 2 倍の場合，角度 θ の取りうる範囲は $0° \leqq \theta \leqq \boxed{ウ}°$，角度 ϕ の取りうる範囲は $0° \leqq \phi \leqq \boxed{エ}°$ となる。また，粒子 A の重さが粒子 B の重さに比べて十分重ければ，衝突で粒子 B が得る最大速度は $\boxed{オ}$ となる。

［(ア) ～ (エ) の選択肢］

① 30　② 45　③ 60　④ 90　⑤ 120　⑥ 150　⑦ 180

［(オ) の選択肢］ ① $\dfrac{v_0}{2}$　② v_0　③ $2v_0$　④ $4v_0$

解説

(1)　粒子 A の運動方向の運動量保存則により　$M_1v_0 = \boldsymbol{M_1v_1\cos\theta + M_2v_2\cos\phi}$

(2)　粒子 A の運動方向に垂直な方向の運動量保存則により　$M_1v_1\sin\theta = \boldsymbol{M_2v_2\sin\phi}$

(3)　力学的エネルギー保存則により　$\dfrac{M_1{v_0}^2}{2} = \boldsymbol{\dfrac{M_1{v_1}^2}{2} + \dfrac{M_2{v_2}^2}{2}}$

(4)　$(M_1v_0 - M_1v_1\cos\theta)^2 = (M_2v_2)^2\cos^2\phi$　$(M_1v_1\sin\theta)^2 = (M_2v_2)^2\sin^2\phi$

$(M_1v_0 - M_1v_1\cos\theta)^2 + (M_1v_1\sin\theta)^2 = (M_2v_2)^2$

(c) 式より　$M_1M_2{v_0}^2 - M_1M_2{v_1}^2 = (M_2v_2)^2$

v_2 を消去して v_1 の 2 次式を導くと

$(M_1+M_2){v_1}^2 - 2M_1v_0\cos\theta\cdot v_1 + (M_1-M_2){v_0}^2 = 0$

$v_1 > 0$ であるから

$$v_1 = \frac{M_1\cos\theta + \sqrt{{M_2}^2 - {M_1}^2\sin^2\theta}}{M_1+M_2}v_0 = \boldsymbol{\frac{R\cos\theta + \sqrt{1-R^2\sin^2\theta}}{R+1}}v_0$$

(5)　(4) と同様にして v_2 に関する 2 次式を求めると　$(M_1+M_2){v_2}^2 - 2M_1v_0\cos\phi\cdot v_2 = 0$

$v_2 \fallingdotseq 0$ であるから　$v_2 = \dfrac{2M_1\cos\phi}{M_1+M_2}v_0 = \boldsymbol{\dfrac{2R\cos\phi}{R+1}}v_0$

(ア)　$1-R^2\sin^2\theta > 0$, $R<1$ であるから $\sin\theta \leqq 1$ のすべての値をとりうる。

ゆえに　**$0 \leqq \theta \leqq 180°$**

(イ)　$v_2 > 0$, $v_0 > 0$, $R > 0$ であるから $\cos\phi \leqq 1$ のすべての値をとりうる。

ゆえに　**$0 \leqq \phi \leqq 90°$**

(ウ)　$R=2$ であるから　$1-4\sin^2\theta > 0$　　ゆえに　$\sin\theta \leqq \dfrac{1}{2}$

よって　**$0 \leqq \theta \leqq 30°$**

(エ)　$v_2 = \dfrac{4\cos\phi}{3}v_0$　　ゆえに　$\cos\phi \geqq 0$

よって　**$0 \leqq \phi \leqq 90°$**

(オ)　$R = \infty$ であるから　$v_2 = \dfrac{2\cos\phi}{1+\dfrac{1}{R}}v_0 \fallingdotseq 2\cos\phi\cdot v_0$　　ゆえに　$v_{2\max} = \boldsymbol{2v_0}$