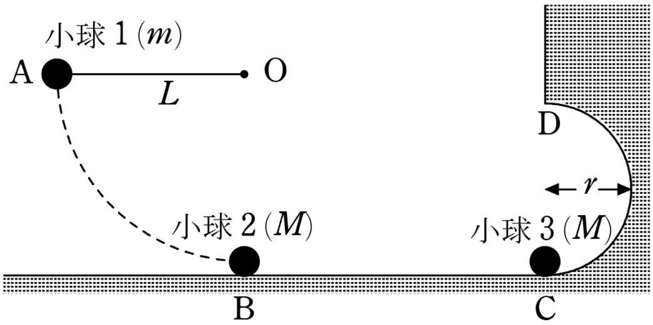
次の文を読んで，$\boxed{\quad}$ に適した式を記せ。

図のように，長さ L の糸で点 O からつり下げられた質量 m の小球 1 が，点 A まで持ち上げられている。このとき，糸はたるむことなく水平に保たれている。一方，水平な床面には，質量 M の小球 2 と質量 M の小球 3 が，点 B と点 C にそれぞれ置かれている。右端の壁面には，半径 r の半円筒状のくぼみがある。ここで，点 O は点 B の鉛直線上，距離 L の位置にある。また，CD は半円の直径であり，点 D は点 C の鉛直線上にある。



いま，小球 1 を静かにはなして，点 B に静止している小球 2 に衝突させる。衝突後，小球 2 は右方向にすべり，点 C に静止している小球 3 に衝突する。この衝突後，小球 3 は円筒状の内面にそって上昇する。ただし，小球 1 は，小球 2 との衝突後，他の小球の運動の妨げにならないものとする。また，床面と円筒状のくぼみの内面はすべてなめらかとする。すべての衝突における，はねかえり係数(反発係数)を 1，重力加速度の大きさを g とする。どの小球の大きさも，無視できるほど十分に小さいものとし，それぞれの小球の運動は，右端の壁面に対して垂直で，かつ，水平な床面に対して鉛直な同一平面内(すなわち，図の紙面内)で起こるものとする。

(1) 小球 1 が点 B で小球 2 に衝突する直前の速さは $\boxed{\text{ア}}$ と表される。衝突後，小球 1 は床面から高さ $\boxed{\text{イ}}$ まで上昇する。

(2) 衝突直後の小球 2 の速さは $\boxed{\text{ウ}}$ と表される。小球 2 は，点 C で小球 3 と衝突するが，その衝突直後の小球 2 の速さは $\boxed{\text{エ}}$ である。

(3) このとき，小球 3 が受けた力積の大きさは $\boxed{\text{オ}}$ であり，小球 3 は半円筒状のくぼみの内面にそって上昇する。

(4) 小球 3 が点 D に到達するための糸の長さ L の最小値は $\boxed{\text{カ}}$ である。この最小の長さの糸を用いたとき，小球 3 の点 D での速さは $\boxed{\text{キ}}$ であり，小球 3 は点 Dから点 B に落下した。このとき，BC 間の距離は $\boxed{\text{ク}}$ である。

解説

(1) (ア) 衝突直前の速さを $\boldsymbol{v}$ とすると，力学的エネルギー保存則により

$$\frac{1}{2}mv^2=mgL \qquad \text{ゆえに} \quad v=\boldsymbol{\sqrt{2gL}}$$

(イ) 小球 1 と 2 の衝突後の速度を $\boldsymbol{v_1}$，$\boldsymbol{v_2}$ とすると，運動量保存とはね返りの条件から

$$m\sqrt{2gL}=mv_1+Mv_2 \qquad \frac{v_1-v_2}{\sqrt{2gL}}=-1$$

ゆえに $v_1=\dfrac{m-M}{m+M}\sqrt{2gL}$

上昇する高さを $\boldsymbol{h}$ とすると，力学的エネルギー保存則により

$$\frac{1}{2}m\left(\frac{m-M}{m+M}\sqrt{2gL}\right)^2=mgh \qquad \text{ゆえに} \quad h=\boldsymbol{\left(\frac{m-M}{m+M}\right)^2L}$$

(2) (ウ) v_1 の求め方と同様にして $v_2=\boldsymbol{\dfrac{2m}{m+M}\sqrt{2gL}}$

(エ) 質量の等しい 2 球の完全弾性衝突では速度交換が行われる。衝突直後の小球 2 と 3 の速度をそれぞれ $\boldsymbol{v_2'}$，$\boldsymbol{v_3}$ とすると $v_2'=\boldsymbol{0}$

(3) (オ) 運動量と力積の関係を利用する

(始めの運動量) + (力積) = (あとの運動量) より

$0+P=Mv_3$ ， $v_3=\dfrac{2mM}{m+M}\sqrt{2gL}$ となるので，

$$\therefore \quad P=\boldsymbol{\frac{2mM}{m+M}\sqrt{2gL}}$$

(4) (カ) D 点における小球 3 の速さの最小値を $\boldsymbol{u}$ とすると，力学的エネルギー保存則，および鉛直方向の力のつりあいから

$$\frac{1}{2}Mv_3{}^2=\frac{1}{2}Mu^2+2Mgr \qquad \cdots\cdots \text{(a)}$$

$$Mg=\frac{Mu^2}{r} \qquad \cdots\cdots \text{(b)}$$

(a) (b) 2 式から $\boldsymbol{u}$ を消去すると $\dfrac{1}{2}Mv_3{}^2=\dfrac{1}{2}Mgr+2Mgr=\dfrac{5}{2}Mgr$

ゆえに $v_3=\sqrt{5gr}=\dfrac{2m}{m+M}\sqrt{2gL}$ よって $L=\boldsymbol{\dfrac{5r}{2}\left(\dfrac{m+M}{2m}\right)^2}$

(キ) (b) から $u=\boldsymbol{\sqrt{gr}}$

(ク) 落下時間は $\sqrt{\dfrac{4r}{g}}$ であるから $\mathrm{BC}=\sqrt{gr}\cdot\sqrt{\dfrac{4r}{g}}=\boldsymbol{2r}$