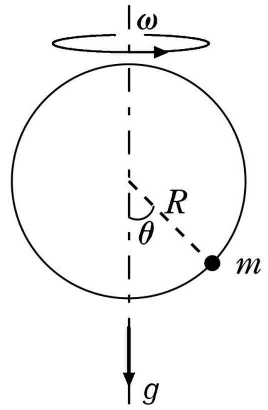
半径 R の輪と穴のあいた質量 m の小球がある。小球は輪に通されており，輪にそって動くことができる。図のように，輪が，中心を通る鉛直な軸のまわりに角速度 ω で回転している場合，小球にはたらく力のつりあいや小球の運動を，輪といっしょに回転する立場で考える。輪に対する小球の位置は，角度 θ で表すことができる。重力加速度の大きさは g とする。以下の問いに答えよ。



(1)　輪と小球の間に摩擦がない場合を考える。

(a)　小球が位置 θ にある場合，小球にはたらくすべての力について説明せよ。さらに，それらの向きを図示せよ。

(b)　小球が $\theta=\theta_0$ の位置に止まっている場合，位置 θ_0，半径 R，角速度 ω の間の関係式を求めよ。ただし，$0<\theta_0<\dfrac{\pi}{2}$ とする。

(c)　角速度 ω が十分小さい場合，小球は $\theta=0$ を中心とする振幅の小さな単振動をした。その単振動の周期を求めよ。ここで，θ は十分小さいとして，近似式 $\sin\theta \fallingdotseq \theta$，$\cos\theta \fallingdotseq 1$ を用いてよい。

(2)　輪と小球の間に摩擦がある場合を考え，静止摩擦係数を $\mu\,(0<\mu<1)$ とする。小球が $\theta=\dfrac{\pi}{4}$ の位置に止まっているとする。角速度 ω を徐々に変えた場合，小球が動き始めるときの角速度を求めよ。

解説

輪といっしょに回転する立場で考えるとき，遠心力を用いて，力のつりあいの式を立てる。

(1)(a)　重力：$\boldsymbol{mg}$　　遠心力：$\boldsymbol{mR\sin\theta\cdot\omega^2}$

垂直抗力：$\boldsymbol{N}$　　図 1

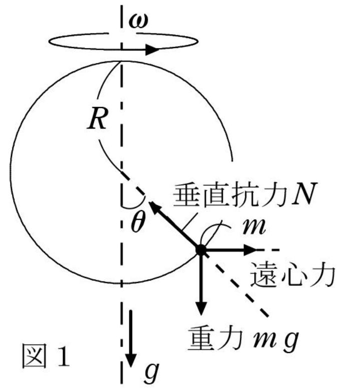


図1

(b)　$\theta=\theta_0$ のときのつりあいの式を立てる。

水平方向：$N\sin\theta_0-mR\sin\theta_0\cdot\omega^2=0$

鉛直方向：$N\cos\theta_0-mg=0$

よって

$$\boldsymbol{\cos\theta_0=\frac{g}{R\omega^2}}$$

(c)　図 2 のように x 軸と原点 O をとり，接線方向の小球の加速度を a として，運動方程式を立てる。

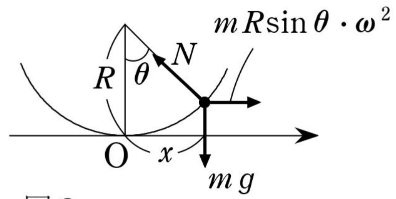


図2

$$ma=-mg\sin\theta+mR\sin\theta\cdot\omega^2\cdot\cos\theta$$

$\sin\theta=\theta$，$\cos\theta=1$ より

$$\begin{aligned}ma&=-mg\theta+mR\omega^2\theta\\&=-m(g-R\omega^2)\theta\\&=-m(g-R\omega^2)\frac{x}{R}\\&=-Kx\end{aligned}$$

よって　$T=2\pi\sqrt{\dfrac{m}{K}}=\boldsymbol{2\pi\sqrt{\dfrac{R}{g-R\omega^2}}}$

(2)　$0<\mu<1$，$\tan 45°=1$，$\mu=\tan\theta$ の条件から，輪が回転しないときは，$\theta=\dfrac{\pi}{4}$ の位置に止まっていることはできない。よって，角速度には上限と下限がある。

角速度の上限を ω_1 とする。輪から受ける垂直抗力を N_1 とすると，最大摩擦力は μN_1 で，その方向は輪の接線方向で下向きであるから，輪の半径方向の力のつりあいから

$$mg\cos\theta+(mR\sin\theta\cdot\omega_1{}^2)\sin\theta-N_1=0$$

輪の接線方向の力のつりあいから

$$\mu N_1+mg\sin\theta-(mR\sin\theta\cdot\omega_1{}^2)\cos\theta=0$$

両式より N_1 を消去して

$$\begin{aligned}\omega_1&=\sqrt{\frac{g(\sin\theta+\mu\cos\theta)}{R\sin\theta(\cos\theta-\mu\sin\theta)}}\\&=\sqrt{\frac{g(\tan\theta+\mu)}{R\sin\theta(1-\mu\tan\theta)}}\end{aligned}$$

$\theta=\dfrac{\pi}{4}$ を代入して　$\omega_1=\sqrt{\dfrac{\sqrt{2}\,g(1+\mu)}{R(1-\mu)}}$

角速度の下限を ω_2 とする。垂直抗力を N_2 としたとき，最大摩擦力 μN_2 は輪の接線方向で上向きであるから，同様にして

$$mg\cos\theta+(mR\sin\theta\cdot\omega_2{}^2)\sin\theta-N_2=0$$

$$mg\sin\theta-\mu N_2-(mR\sin\theta\cdot\omega_2{}^2)\cos\theta=0$$

両式より N_2 を消去し，$\theta=\dfrac{\pi}{4}$ を代入して

$$\omega_2=\sqrt{\frac{g(\sin\theta-\mu\cos\theta)}{R\sin\theta(\cos\theta+\mu\sin\theta)}}$$

$$=\sqrt{\frac{\sqrt{2}\,g(1-\mu)}{R(1+\mu)}}$$

よって，動き始めるときの角速度 $\boldsymbol{\omega}$ は

$$\boldsymbol{\omega}=\sqrt{\frac{\sqrt{2}\,\boldsymbol{g}(1+\boldsymbol{\mu})}{\boldsymbol{R}(1-\boldsymbol{\mu})}}$$

あるいは　$\boldsymbol{\omega}=\sqrt{\dfrac{\sqrt{2}\,\boldsymbol{g}(1-\boldsymbol{\mu})}{\boldsymbol{R}(1+\boldsymbol{\mu})}}$