$\boxed{1}$ $x+y=1$，$x^2+y^2=2$ のとき，$x^4+y^4=\boxed{\quad ア \quad}$，$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\boxed{\quad イ \quad}$ である。

$\boxed{2}$ 正の実数 x, y, z が $\dfrac{yz}{x}=\dfrac{zx}{4y}=\dfrac{xy}{9z}$ を満たすとする。このとき，式 $\dfrac{x+y+z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ の値を求めよ。

$\boxed{3}$ 次の x と y に関する連立方程式を解け。ただし，a と b は実数の定数とする。

$$\begin{cases} ax+y=1 \\ x+by=1 \end{cases}$$

$\boxed{4}$ 1でない実数 a に対し，$f(x)=x^3+ax^2+x+1$，$g(x)=x^3+x^2+x+a$ とする．方程式 $f(x)=0$ と $g(x)=0$ がただ1つの共通解をもつならば，$a=\boxed{\quad ア \quad}$ であり，$f(x)=0$ のすべての解は $\boxed{\quad イ \quad}$ である．

$\boxed{5}$ 次の問いに答えよ。

(1) 実数 x, y について，

$$4x^2+12y^2-12xy+4x-18y+7=0$$

の最小値，およびそのときの x, y の値を求めよ。

(2) a を負の実数とする。

$$4x^2+12y^2-12xy+4x-18y+7=a$$

を満たす x, y が隣り合う整数のとき，a の最大値，およびそのときの x, y の値を求めよ。

$\boxed{6}$ 次の 2 つの 2 次関数 $f(x)$, $g(x)$ を考える：

$f(x) = x^2 + (4a-2)x + 2a^2 + 11$

$g(x) = -x^2 + 2x + 3$

（1） 「$f(u) \geqq g(v)$」がすべての実数 u, v に対して成立するためには，a の満たすべき条件は $\boxed{13}$ である。

（2） 「$f(x) \geqq g(x)$」がすべての実数 x に対して成立するためには，a の満たすべき条件は $\boxed{14}$ である。

（3） 区間 $1 \leqq x \leqq 3$ における $f(x) - g(x)$ の最小値を m とすると，

$a \leqq \boxed{15}$ のとき，$m = \boxed{16}\,a^2 + \boxed{17}\,a + \boxed{18}$.

$\boxed{15} < a < \boxed{19}$ のとき，$m = \boxed{20}\,a^2 + \boxed{21}\,a + \boxed{22}$.

$a \geqq \boxed{19}$ のとき，$m = \boxed{23}\,a^2 + \boxed{24}\,a + \boxed{25}$

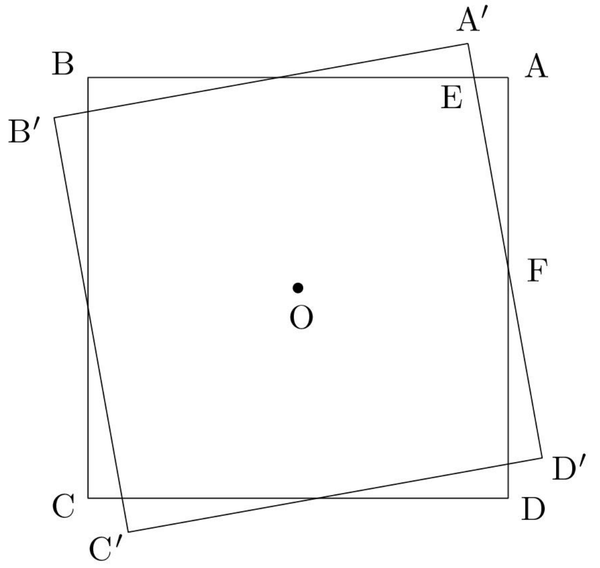
である。

$\boxed{7}$ **(1)** 不等式 $|x^2 - 4x| < x - 2$ を満たす実数 x の値の範囲を求めよ.

(2) 等式 $|x^2 - 4x| = x + a$ を満たす実数 x がちょうど 2 つ存在する実数 a の値の範囲を求めよ.

(3) 等式 $|x^2 - 4x| = bx$ を満たす 0 でない実数 x が存在する実数 b の値の範囲を求めよ.

$\boxed{8}$ 一辺の長さが1の正方形ABCDとその対角線の交点をOとする．正方形A′B′C′D′は正方形ABCDをOを中心に回転したものである．AE$=a$，AF$=b$とする．



1. $b=2a$ のとき，$\mathrm{AD}=\left(\boxed{44}+\sqrt{\boxed{45}}\right)a$ である．

2. a，b について，関係式 $\boxed{46}\,ab-\boxed{47}\,(a+b)+1=0$ が成り立つ．

3. $a+b$ の最大値は $\boxed{48}-\sqrt{\boxed{49}}$ である．

$\boxed{9}$ 実数 x に対して，関数 $f(x)$ を $f(x)=\dfrac{x^2+2}{x^2-2x+3}$ と定める。以下の問いに答えよ。

(1) $x \geqq 0$ のとき，$f(x)$ のとりうる値の範囲を求めよ。

(2) x を正の有理数とし，$f(x)$ の値を互いに素な正の整数 p，q を用いて $f(x)=\dfrac{q}{p}$ と表す。このとき，$q \leqq 3$ となるような x をすべて求めよ。

$\boxed{10}$ 三角形ABCにおいて，内接円の半径が1，$\angle A = 60^\circ$ とする。

(1) 内接円が辺AB, ACと接する点をそれぞれP, Qとおくとき，三角形APQの面積を求めよ。

(2) $AB : AC = 2 : 1$ のとき，三角形ABCの面積を求めよ。

(3) $AB = 3$ のとき，三角形ABCの面積を求めよ。

$\boxed{11}$ $AB = 8$, $BC = 5$, $\angle B = 60^\circ$ の $\triangle ABC$ がある。

(1) $AC = \boxed{ア}$，$\triangle ABC$ の面積は $\boxed{イ}\sqrt{\boxed{ウ}}$，$\triangle ABC$ の内接円の半径は $\sqrt{\boxed{エ}}$ である。

(2) $\triangle ABC$ の外接円の半径は $\dfrac{\boxed{オ}}{\boxed{カ}}\sqrt{\boxed{キ}}$ である。

(3) $\triangle ABC$ の外接円の点Bを含まない弧AC上に $AD = 3$ となる点Dをとる。このとき, $CD = \boxed{ク}$ である。

(4) $\cos\angle BAD = \dfrac{\boxed{ケ}}{\boxed{コ}}$, $BD = \dfrac{\boxed{サ}}{\boxed{シ}}$ である。

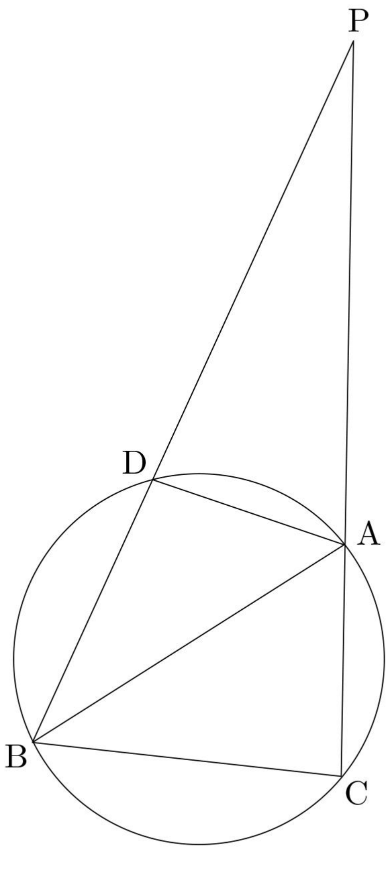
(5) ACとBDの交点をEとするとき, $\cos\angle AED = \dfrac{\boxed{ス}}{\boxed{セ}}$ である。

$\boxed{12}$ 円に内接する三角形ABCがあり，BC $= a$，CA $= b$，AB $= c$ とする ($a > b$, $b < c$)。下図のように，円周上にDを，$\angle$DBA $= \angle$ABC となるようにとり，BD を延長した直線と CA を延長した直線が交わる点を P とする。a, b, c を用いた式で空欄 $\boxed{\text{ア}}$ 〜 $\boxed{\text{コ}}$ を埋めよ。

DP 上に点 Q を $\angle$DQA $= \angle$BAC となるようにとる。四角形 ADBC は円に内接しているので，$\angle$BDA と $\angle$BCA の和は $180°$ であるから，$\angle$QDA $= \angle$BCA であり，$\triangle$QAD と $\triangle$ABC は相似である。また，AD $=$ $\boxed{\text{ア}}$ だから，QD $=$ $\boxed{\text{イ}}$ である。

$\angle$BQA $= \angle$BAC，$\angle$QBA $= \angle$ABC であるから，$\triangle$QBA と $\triangle$ABC は相似であり，よって QB $=$ $\boxed{\text{ウ}}$ となり，BD $=$ QB$-$QD だから，BD $=$ $\boxed{\text{エ}}$ となる。

また，$\angle$QDA $= \angle$BCA であり，$\angle$P は共通より，$\triangle$PAD と $\triangle$PBC は相似であるから，DP : CP $=$ $\boxed{\text{オ}}$: $\boxed{\text{カ}}$ となる。CP $=$ AP $+$ $\boxed{\text{キ}}$ より，DP $=$ $\boxed{\text{ク}}$ AP $+$ $\boxed{\text{ケ}}$ となる。方べきの定理より，DP・BP $=$ AP・CP であり，これを AP について解くと AP $=$ $\boxed{\text{コ}}$ となる。



$\boxed{13}$

　三角形 ABC を AB＝AC かつ AB＞BC である二等辺三角形とする．辺 AB 上の点 D を，三角形 ABC と三角形 CDB が相似となるようにとる．三角形 ABC の外心を O，三角形 ADC の外心を P とする．以下の問いに答えよ.

(1)　点 P は三角形 ADC の外部にあることを示せ.

(2)　四角形 AOCP において，∠AOC＝∠APC であることを示せ.

(3)　三角形 CDB の外心は，三角形 ADC の外接円の周上にあることを示せ.

$\boxed{14}$　x, y を自然数，p を 3 以上の素数とするとき，次の各問に答えよ。ただし，(**1**)，(**3**)は答のみを解答欄に記入せよ。

(**1**)　$x^2 - y^2 = p$ が成り立つとき，x, y を p で表せ。

(**2**)　$x^3 - y^3 = p$ が成り立つとき，p を 6 で割った余りが 1 となることを証明せよ。

(**3**)　$x^3 - y^3 = p$ が自然数の解の組 $(x,\ y)$ をもつような p を，小さい数から順に $p_1,\ p_2,\ p_3,\ \cdots\cdots$ とするとき，p_5 の値を求めよ。

$\boxed{15}$ $(2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13)^{10}$ の 10 進法での桁数を求めよ。

$\boxed{16}$

以下の問いに答えよ。

(1) 任意の自然数 a に対し，a^2 を 3 で割った余りは 0 か 1 であることを証明せよ。

(2) 自然数 a, b, c が $a^2+b^2=3c^2$ を満たすと仮定すると，a, b, c はすべて 3 で割り切れなければならないことを証明せよ。

(3) $a^2+b^2=3c^2$ を満たす自然数 a, b, c は存在しないことを証明せよ。

$\boxed{17}$

(1) 方程式 $\dfrac{2}{x}+\dfrac{4}{y}=1$ を満たす整数の組 $(x,\ y)$ は $\boxed{\ 13\ }$ 組あるが，そのなかで x が最大となる組 $(x,\ y)$ は ($\boxed{\ 14\ }$, $\boxed{\ 15\ }$) であり，x が最小となる組 $(x,\ y)$ は，($\boxed{\ 16\ }$, $\boxed{\ 17\ }$) である。

(2) 方程式 $x^2+3xy+2y^2-6x-8y=0$ を満たす整数の組 $(x,\ y)$ は $\boxed{\ 18\ }$ 組あるが，x が最大となる組 $(x,\ y)$ は ($\boxed{\ 19\ }$, $\boxed{\ 20\ }$) であり，x が最小となる組 $(x,\ y)$ は，($\boxed{\ 21\ }$, $\boxed{\ 22\ }$) である。

$\boxed{18}$ $x,\ y,\ z,\ p$ は自然数で

$$xy+yz+zx=pxyz, \qquad x \leqq y \leqq z \qquad \cdots\cdots①$$

を満たしている．次の問いに答えよ．

問 1 $p \leqq 3$ を示せ．

問 2 ①を満たす自然数の組 $(p,\ x,\ y,\ z)$ をすべて求めよ．

$\boxed{19}$　7個の数字 1, 1, 2, 3, 4, 5, 5 の中から 5 個の数字を選んで 1 列に並べ，5 桁の数を作る。

(1) 5 桁の数は全部で $\boxed{\text{ソ}}$ 通りできる。これらの 5 桁の数を小さい方から順に並べたとき，23145 は $\boxed{\text{タ}}$ 番目の数である。

(2) 同じ数字が隣り合わないような 5 桁の数は全部で $\boxed{\text{チ}}$ 通りできる。

$\boxed{20}$

問 1．6 人が A, B または C の 3 部屋に入る方法は，1 人も入らない部屋があっても良いという条件の下で，$\boxed{(\text{ア})}\boxed{(\text{イ})}\boxed{(\text{ウ})}$ 通りある。

問 2．6 人を 2 つのグループに分ける方法は，$\boxed{(\text{エ})}\boxed{(\text{オ})}$ 通りある。ただし各グループの構成員は少なくとも 2 人以上とする。

問 3．6 人を 3 つのグループに分ける方法は，$\boxed{(\text{カ})}\boxed{(\text{キ})}$ 通りある。ただし各グループの構成員は少なくとも 1 人以上とする。

問 4．男 3 人，女 3 人が A, B または C の 3 部屋に入る方法は，1 人も入らない部屋があっても良いが各部屋は男女同数という条件の下で，$\boxed{(\text{ク})}\boxed{(\text{ケ})}$ 通りある。

$\boxed{21}$ 赤，青，黒それぞれ 3 枚ずつ，合計 9 枚のカードがある。この中から 1 枚を引いて図の 1 の位置に置き，さらに 1 枚を引いて図の 2 の位置に置く。以下同様にして，9 枚のカードを図の位置に置く。1, 2, 3 の位置を 1 行目，4, 5, 6 の位置を 2 行目，7, 8, 9 の位置を 3 行目と呼ぶとき，以下の問いに答えよ。

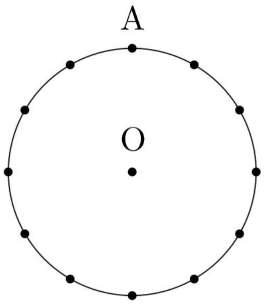
1	2	3
4	5	6
7	8	9

(1) 1 行目に赤のカードが 2 枚，黒のカードが 1 枚並ぶ確率は $\dfrac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}\boxed{ウ}}$ である。

(2) 1 つの行に赤のカードが 3 枚並ぶ確率は $\dfrac{\boxed{エ}}{\boxed{オ}\boxed{カ}}$ である。

(3) 1 つの行だけに同じ色のカードが 3 枚並ぶ確率は $\dfrac{\boxed{キ}\boxed{ク}}{\boxed{ケ}\boxed{コ}\boxed{サ}}$ である。

$\boxed{22}$　図のように点 O を中心とする円の円周を 12 等分する 12 個の点をとり，そのうちの 1 つを点 A とする。さらに点 P，Q を，3 点 A，P，Q が互いに異なるように選ぶ。ただし点 A，P，Q はこの順に時計の針の回転と逆の向きに並ぶものとする。このとき，次の各問に答えよ。答のみ解答欄に記入せよ。



(1)　△APQ が直角三角形になる確率を求めよ。

(2)　△APQ が二等辺三角形になる確率を求めよ。

(3)　点 O が △APQ の内部または周上にある確率を求めよ。

$\boxed{23}$ 座標平面上で，点Aが原点 $(0,\ 0)$ から出発して，次のルールで動くとする．

【ルール】1個のさいころを1回投げて1回の試行とする．

1か2か3の目が出れば，x 軸の正の方向に1動く．

4か5の目が出れば，y 軸の正の方向に1動く．

6の目が出れば，動かない．

このとき，次の問(i)〜(v)に答えよ．解答は解答用紙の所定欄に記入せよ．

(i)　2回の試行を行う．2回の試行の後，点Aが点 $(1,\ 1)$ にある確率を求めよ．

(ii)　4回の試行を行う．4回の試行の後，点Aが点 $(2,\ 2)$ にある確率を求めよ．

(iii)　6回の試行を行う．6回の試行の後，点Aが点 $(2,\ 2)$ にある確率を求めよ．

(iv)　3回の試行を行う．3回目の試行で初めて点Aが点 $(1,\ 1)$ に到達する確率を求めよ．

(v)　5回の試行を行う．5回目の試行で初めて点Aが点 $(2,\ 2)$ に到達する確率を求めよ．

$\boxed{24}$ 数直線上を動く点A，Bの最初の位置は，それぞれ原点および -2 である。コインを1回投げて，表が出ればAは正の方向に1，Bは正の方向に2だけ動く。一方，裏が出ればAは負の方向に1，Bは負の方向に2だけ動く。このとき，次の問いに答えよ。

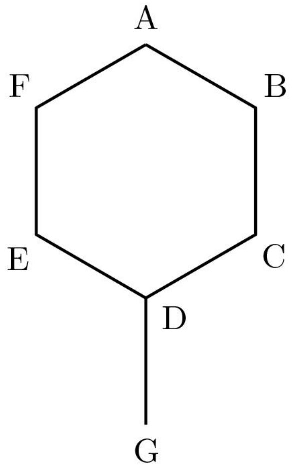
問1　コインを4回投げたとき，最後にAが原点にいる確率は $\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$ である。

問2　コインを4回投げたとき，最後にAとBが同じ座標にいる確率は $\dfrac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}$ である。

問3　コインを4回投げたとき，その過程でBの座標がAの座標よりも1度でも大きくなることがある確率は $\dfrac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}$ である。

$\boxed{25}$

正六角形 ABCDEF の頂点 D と正六角形の外部の点 G を線分で結んだ右のような図形がある．動点 P はこの図形の線分上を動き，点から点へ移動する．動点 P の隣接する点への移動には 1 秒間を要する．また，隣接する点が複数あるときは，等しい確率でどれか 1 つの点に移動するものとする．



(1) 動点 P が A から出発して 4 秒後に G にいる確率は $\dfrac{\boxed{(53)}}{\boxed{(54)\,(55)}}$ である．

(2) 動点 P が A から出発して 5 秒後に D にいる確率は $\dfrac{\boxed{(56)\,(57)}}{\boxed{(58)\,(59)}}$ である．

(3) 動点 P が A から出発して D に到達した時点で移動を終了するとき，$2n+1$ 秒以内に移動を終了する確率は $\dfrac{\boxed{(60)}^{\,n}-\boxed{(61)}^{\,n}}{\boxed{(62)}^{\,n}}$ である．ただし，n は自然数とする．