$\boxed{1}$ $(x+y)^2=x^2+y^2+2xy$ より

$$xy=\frac{(x+y)^2-(x^2+y^2)}{2}=\frac{1^2-2}{2}=-\frac{1}{2}$$

であるから，

$$x^4+y^4=(x^2+y^2)^2-2x^2y^2=2^2-2\times\left(-\frac{1}{2}\right)^2=4-\frac{1}{2}=\underset{(ア)}{\boxed{\frac{7}{2}}}$$

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{x^2+y^2}{xy}=\frac{2}{-\frac{1}{2}}=\underset{(イ)}{\boxed{-4}}$$

$\boxed{2}$ $\dfrac{yz}{x}=\dfrac{zx}{4y}=\dfrac{xy}{9z}=k$ とおくと，

$$\begin{cases} yz=kx & \cdots\cdots ① \\ zx=4ky & \cdots\cdots ② \\ xy=9kz & \cdots\cdots ③ \end{cases}$$

②，③の辺々かけあわせて

$$x^2yz=36k^2yz$$

$y>0$，$z>0$ より

$$x^2=36k^2$$

$x>0$，$k>0$ より

$$x=6k$$

同様に，①，③より

$$xy^2z=9k^2xz \qquad \therefore\ y=3k$$

①，②より

$$xyz^2=4k^2xy \qquad \therefore\ z=2k$$

以上を代入して，

$$\begin{aligned}\frac{x+y+z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}&=\frac{6k+3k+2k}{\sqrt{(6k)^2+(3k)^2+(2k)^2}}\\&=\frac{11k}{\sqrt{49k^2}}\\&=\frac{11k}{7k}\quad(\because\ k>0)\\&=\frac{11}{7}\quad(答)\end{aligned}$$

$\boxed{3}$

$$\begin{cases} ax+y=1 & \cdots\cdots ① \\ x+by=1 & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

①$\times b-$②より

$$(ab-1)x=b-1 \quad \cdots\cdots ③$$

1° $ab-1\neq 0$ のとき，③より

$$x=\frac{b-1}{ab-1}$$

①に代入して

$$y=1-a\cdot\frac{b-1}{ab-1}=\frac{ab-1-a(b-1)}{ab-1}=\frac{a-1}{ab-1}$$

2° $ab-1=0$ のとき

(i) $b-1=0$ すなわち $a=b=1$ のとき

①と②はともに

$$x+y=1$$

であり，

$$(x,\ y)=(k,\ 1-k) \quad (k\text{ は任意の数})$$

(ii) $b-1\neq 0$ のとき

③を満たす x は存在しないから，①かつ②を満たす $(x,\ y)$ の組も存在しない。

以上をまとめて，与えられた連立方程式の解は

$$\begin{cases} ab\neq 1\text{ のとき} \quad (x,\ y)=\left(\dfrac{b-1}{ab-1},\ \dfrac{a-1}{ab-1}\right) \\ a=b=1\text{ のとき} \quad (x,\ y)=(k,\ 1-k) \quad (k\text{ は任意の数}) \\ ab=1\text{ かつ } (a,\ b)\neq(1,\ 1)\text{ のとき} \quad \text{解なし} \end{cases}$$

(答)

$\boxed{4}$

$$\begin{cases} x^3+ax^2+x+1=0 & \cdots\cdots ① \\ x^3+x^2+x+a=0 & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

②を①に代入して a を消去すると

$$x^3-(x^3+x^2+x)x^2+x+1=0$$
$$x^5+x^4-x-1=0$$
$$(x+1)(x^4-1)=0$$
$$(x+1)^2(x-1)(x^2+1)=0$$

$a\neq 1$ より

$$x^3+x^2+x+1=(x+1)(x^2+1)\neq 0$$

であるから

共通解は $x=1$

①または②より

$$1+a+1+1=0 \qquad \therefore\ a=\boxed{-3}\ (\text{ア})$$

このとき，

$$f(x)=x^3-3x^2+x+1=(x-1)(x^2-2x-1)$$

であるから，方程式 $f(x)=0$ のすべての解は

$$x=\boxed{1,\ 1\pm\sqrt{2}}\ (\text{イ})$$

(別解) ①－②より

$$(a-1)x^2+1-a=0$$
$$(a-1)(x^2-1)=0$$

$a\neq 1$ より

$$x^2-1=0 \qquad \therefore\ x=\pm 1$$

共通解が $x=1$ のとき，①および②より

$$1+a+1+1=0 \qquad \therefore\ a=\underset{(\text{ア})}{\boxed{-3}}\ (\neq 1)$$

共通解が $x=-1$ のとき，①および②より

$$-1+a-1+1=0 \qquad \therefore\ a=1\ (\text{不適})$$

以下，上の解答と同じ。

$\boxed{5}$

(1) $$\begin{aligned} 4x^2+12y^2-12xy+4x-18y+7 &= 4\{x^2-(3y-1)x\}+12y^2-18y+7 \\ &= 4\left(x-\frac{3y-1}{2}\right)^2+3y^2-12y+6 \\ &= 4\left(x-\frac{3y-1}{2}\right)^2+3(y-2)^2-6 \end{aligned}$$

は

$$x-\frac{3y-1}{2}=0 \text{ かつ } y-2=0$$

すなわち，

$$x=\frac{5}{2},\quad y=2 \quad \text{(答)}$$

のとき

最小値 -6 (答)

をとる。

(2) $y=x+1$ のとき

$$\begin{aligned} a &= 4\left(x-\frac{3x+2}{2}\right)^2+3(x-1)^2-6 \\ &= (-x-2)^2+3(x-1)^2-6 \\ &= 4x^2-2x+1 \\ &= 4\left(x^2-\frac{1}{2}x\right)+1 \\ &= 4\left(x-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{3}{4}>0 \end{aligned}$$

となって，$a<0$ を満たさない。

$y=x-1$ のとき

$$\begin{aligned} a &= 4\left(x-\frac{3x-4}{2}\right)^2+3(x-3)^2-6 \\ &= (-x+4)^2+3(x-3)^2-6 \\ &= 4x^2-26x+37 \end{aligned}$$

ここで，$f(x)=4x^2-26x+37$ とおくと，

$$\begin{aligned} f(2) &= 16-52+37=1>0 \\ f(3) &= 36-78+37=-5<0 \\ f(4) &= 64-104+37=-3<0 \\ f(5) &= 100-130+37=7>0 \end{aligned}$$

$a<0$ において

a の最大値は -3 (答)

このとき，

$$x=4,\quad y=3 \quad \text{(答)}$$

$\boxed{6}$

(1) $$\begin{aligned} f(u) &= u^2+(4a-2)u+2a^2+11 \\ &= (u+2a-1)^2-(2a-1)^2+2a^2+11 \\ &= (u+2a-1)^2-2a^2+4a+10 \end{aligned}$$

$$g(v) = -v^2+2v+3 = -(v-1)^2+4$$

$f(u) \geqq g(v)$ がすべての実数 $u,\ v$ に対して成り立つための条件は

$$\bigl(f(u)\text{の最小値}\bigr) \geqq \bigl(g(v)\text{の最大値}\bigr)$$

であるから，

$$-2a^2+4a+10 \geqq 4$$

$$2a^2-4a-6 \leqq 0$$

$$a^2-2a-3=(a+1)(a-3) \leqq 0 \qquad \therefore\ \boxed{-1 \leqq a \leqq 3}$$

(2) $$\begin{aligned} f(x)-g(x) &= 2x^2+(4a-4)x+2a^2+8 \\ &= 2(x+a-1)^2-2(a-1)^2+2a^2+8 \\ &= 2(x+a-1)^2+4a+6 \end{aligned}$$

$f(x) \geqq g(x)$ がすべての実数 x に対して成立するための条件は

$$\bigl(f(x)-g(x)\text{の最小値}\bigr) = 4a+6 \geqq 0 \qquad \therefore\ \boxed{a \geqq -\frac{3}{2}}$$

(3) $1 \leqq x \leqq 3$ において $f(x)-g(x)$ は

$-a+1 \geqq 3$ のとき　$x=3$ で最小，

$1 \leqq -a+1 \leqq 3$ のとき　$x=-a+1$ で最小，

$-a+1 \leqq 1$ のとき　$x=1$ で最小

となるから，最小値 m は

$a \leqq \boxed{-2}$ のとき　$m=f(3)-g(3)=\boxed{2}\,a^2+\boxed{12}\,a+\boxed{14}$

$\boxed{-2} \leqq a \leqq \boxed{0}$ のとき　$m=f(-a+1)-g(-a+1)=\boxed{0}\,a^2+\boxed{4}\,a+\boxed{6}$

$a \geqq \boxed{0}$ のとき　$m=f(1)-g(1)=\boxed{2}\,a^2+\boxed{4}\,a+\boxed{6}$

$\boxed{7}$

(1) $|x^2-4x|<x-2$ を解いて，

$$-(x-2)<x^2-4x<x-2 \qquad \cdots\cdots ①$$

①における左の不等式より

$$x^2-3x-2>0$$

$$\therefore\ x<\frac{3-\sqrt{17}}{2} \text{ または } x>\frac{3+\sqrt{17}}{2} \qquad \cdots\cdots ②$$

①における右の不等式より

$$x^2-5x+2<0$$

$$\therefore\ \frac{5-\sqrt{17}}{2}<x<\frac{5+\sqrt{17}}{2} \qquad \cdots\cdots ③$$

$\dfrac{3+\sqrt{17}}{2}-\dfrac{5-\sqrt{17}}{2}=\sqrt{17}-1>0$ に注意して，②かつ③より

$$\frac{3+\sqrt{17}}{2}<x<\frac{5+\sqrt{17}}{2} \quad \text{(答)}$$

(2) $$|x^2-4x|=x+a \iff |x^2-4x|-x=a$$

であることを考え，

$$f(x)=|x^2-4x|-x$$

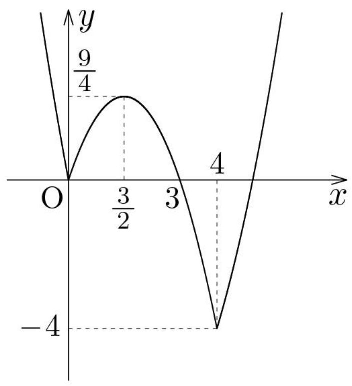
とおくと，$x\leqq 0$ または $x\geqq 4$ のとき

$$f(x)=(x^2-4x)-x=x(x-5)$$

$0\leqq x\leqq 4$ のとき

$$f(x)=-(x^2-4x)-x=-x(x-3)$$

であるから，$y=f(x)$ のグラフは



$y=f(x)$ のグラフと直線 $y=a$ がちょうど 2 つの共有点をもつ範囲を求めて，

$$-4<a<0 \text{ または } a>\frac{9}{4} \quad \text{(答)}$$

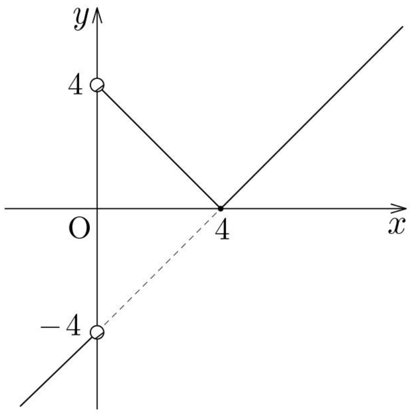
(3) $x\neq 0$ のもとで

$$|x^2-4x|=bx \iff \frac{|x^2-4x|}{x}=b$$

であることを考え，

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4x}{x} = x-4 & (x<0,\ x \geqq 4) \\ \dfrac{-(x^2-4x)}{x} = -x+4 & (0<x \leqq 4) \end{cases}$$

とおき，$y=g(x)$ のグラフをかくと



$y=g(x)$ のグラフと直線 $y=b$ が $x \neq 0$ で共有点をもつ範囲を求めて，

$b<-4$ または $b \geqq 0$ (答)

(注) (2)では $y=|x^2-4x|$ のグラフと直線 $y=x+a$ の，(3)では $y=|x^2-4x|$ のグラフと直線 $y=bx$ の関係を考えることも可能ではあるが，曲線の曲がり具合や増減のスピードの違いを論じる必要が生じて，答案を完成させるのが難しい。上の解答のように未知定数を分離するか，完全に数式処理で解くのが望ましい。

$\boxed{8}$ 線分 DF と辺 C′D′ の交点を G とおくと，

$$\triangle \mathrm{AEF} \equiv \triangle \mathrm{D'GF}$$

であるから

$$\mathrm{DG} = \mathrm{D'G} = \mathrm{AE} = a,$$
$$\mathrm{FG} = \mathrm{EF} = \sqrt{a^2+b^2}$$
$$\therefore\ \mathrm{AD} = \mathrm{AF} + \mathrm{FG} + \mathrm{GD} = b + \sqrt{a^2+b^2} + a$$

1. $b = 2a$ のとき

$$\mathrm{AD} = 2a + a\sqrt{1^2+2^2} + a = (\underset{(44)}{\boxed{3}} + \sqrt{\underset{(45)}{\boxed{5}}})a$$

2. $\mathrm{AD} = a + b + \sqrt{a^2+b^2} = 1$ より

$$\sqrt{a^2+b^2} = 1 - (a+b) \qquad \cdots\cdots ①$$
$$a^2+b^2 = 1 - 2(a+b) + (a+b)^2$$
$$\therefore\ \underset{(46)}{\boxed{2}}ab - \underset{(47)}{\boxed{2}}(a+b) + 1 = 0 \qquad \cdots\cdots ②$$

3. ①を満たす正の実数 a, b が存在するときに，$a+b$ の最大値を求めればよい。

$a+b=k$ とおくと，②より

$$ab = k - \frac{1}{2}$$

であり，a, b を 2 解とする 2 次方程式は

$$x^2 - kx + \left(k - \frac{1}{2}\right) = 0$$

①を満たすことは，②と $1-(a+b) = 1-k > 0$ を同時に満たすことと同値であるから，条件は

$$\begin{cases} (\text{判別式}) = k^2 - 4\left(k - \dfrac{1}{2}\right) = k^2 - 4k + 2 \geqq 0 \\ (2\text{ 解の和}) = k > 0 \\ (2\text{ 解の積}) = k - \dfrac{1}{2} > 0 \\ 1 - k > 0 \end{cases}$$

$$\therefore\ \frac{1}{2} < k \leqq 2 - \sqrt{2}$$

これは $k = a+b$ が実際とり得る値の範囲を表すから，

$$a+b\ \text{の最大値は}\ \underset{(48)}{\boxed{2}} - \sqrt{\underset{(49)}{\boxed{2}}}$$

(注)　$(2-\sqrt{2}) - \dfrac{1}{2} = \dfrac{3-2\sqrt{2}}{2} = \dfrac{\sqrt{9}-\sqrt{8}}{2} > 0$

$\boxed{9}$　$y = \dfrac{x^2+2}{x^2-2x+3}$ とおく。$x^2-2x+3=(x-1)^2+2>0$ を考えて，

$$y = \frac{x^2+2}{x^2-2x+3} \iff y(x^2-2x+3) = x^2+2$$
$$\iff (y-1)x^2 - 2yx + (3y-2) = 0 \qquad \cdots\cdots (*)$$

(1) x の方程式$(*)$が 0 以上の解をもつための条件を求めればよい。

(i) $y=1$ のとき

$$-2x+1=0 \qquad \therefore\ x=\frac{1}{2}\ (\geqq 0)$$

$y \neq 1$ のとき

$$\begin{aligned} g(x) &= x^2 - \frac{2y}{y-1}x + \frac{3y-2}{y-1} \\ &= \left(x - \frac{y}{y-1}\right)^2 + \frac{-y^2+(3y-2)(y-1)}{(y-1)^2} \\ &= \left(x - \frac{y}{y-1}\right)^2 + \frac{2y^2-5y+2}{(y-1)^2} \\ &= \left(x - \frac{y}{y-1}\right)^2 + \frac{(2y-1)(y-2)}{(y-1)^2} \end{aligned}$$

と置いて，$g(x)$ のグラフと x 軸が $x \geqq 0$ で共有点をもつと考えると，

(ii) $g(0) = \dfrac{3y-2}{y-1} \leqq 0$ のとき，条件を満たし，

$$y \neq 1 \text{ かつ } (3y-2)(y-1) \leqq 0 \qquad \therefore\ \frac{2}{3} \leqq y < 1$$

(iii) $g(0) > 0$ のとき，共有点がすべて $x>0$ にある条件を求め，

$$\frac{(2y-1)(y-2)}{(y-1)^2} \leqq 0 \text{ かつ } g(0) = \frac{3y-2}{y-1} > 0 \text{ かつ } \frac{y}{y-1} > 0$$
$$(2y-1)(y-2) \leqq 0 \text{ かつ } (3y-2)(y-1) > 0 \text{ かつ } y(y-1) > 0$$
$$\therefore\ 1 < y \leqq 2$$

以上 (i)または(ii)または(iii)より，$y=f(x)$ のとりうる値の範囲は

$$\frac{2}{3} \leqq f(x) \leqq 2 \quad \text{(答)}$$

(2) $\dfrac{2}{3} \leqq \dfrac{q}{p} \leqq 2$ かつ $q \leqq 3$ となるような互いに素な正の整数 $p,\ q$ の組は

$$(p,\ q) = (1,\ 1),\ (1,\ 2),\ (3,\ 2),\ (2,\ 3),\ (4,\ 3)$$

のいずれかである。$(*)$において $y=f(x)$ とすると，

$f(x)=1$ のとき

$$-2x+1=0 \qquad \therefore\ x=\frac{1}{2}$$

$f(x)=2$ のとき

$$x^2-4x+4=(x-2)^2=0 \qquad \therefore\ x=2$$

$f(x)=\dfrac{2}{3}$ のとき

$$-\frac{1}{3}x^2-\frac{4}{3}x=-\frac{1}{3}x(x+4)=0$$

$x \leqq 0$ となって，正の有理数でない。

$f(x)=\dfrac{3}{2}$ のとき

$$\frac{1}{2}x^2-3x+\frac{5}{2}=0$$

$$x^2-6x+5=(x-1)(x-5)=0 \qquad \therefore\ x=1,\ 5$$

$f(x)=\dfrac{3}{4}$ のとき

$$-\frac{1}{4}x^2-\frac{3}{2}x+\frac{1}{4}=0 \qquad \therefore\ x^2+6x-1=0$$

$\frac{1}{4}$(判別式) $=10$ は平方数でないから，x は有理数でない。

以上より，求める正の有理数 x は

$$x=\frac{1}{2},\ 1,\ 2,\ 5 \quad (\text{答})$$

(注) (1)は文系入試では定石の解法であるが，数学 III の微分法を用いて解いてもよい。

$f(x)=\dfrac{x^2+2}{x^2-2x+3}$ を微分して

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2x(x^2-2x+3)-(x^2+2)(2x-2)}{(x^2-2x+3)^2} \\ &= \frac{-2x^2+2x+4}{(x^2-2x+3)^2} \\ &= \frac{-2(x+1)(x-2)}{(x^2-2x+3)^2} \end{aligned}$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\dfrac{2}{x^2}}{1-\dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{x^2}}=1$$

x	0		2		(∞)
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$\frac{2}{3}$	$\nearrow$	極大 2	$\searrow$	(1)

$\boxed{10}$

(1) 三角形ABCの内心をIとすると，

$$\angle\mathrm{API} = \angle\mathrm{AQI} = 90^\circ,\quad \angle\mathrm{PAI} = \angle\mathrm{QAI} = 30^\circ$$

であるから，

$$\angle\mathrm{AIP} = \angle\mathrm{AIQ} = 60^\circ$$

$$\therefore\quad \mathrm{AP} = \mathrm{AQ} = 1 \times \tan 60^\circ = \sqrt{3}$$

$\triangle$APQの面積S_1は

$$S = \frac{1}{2}\mathrm{AP}\cdot\mathrm{AQ}\cdot\sin 60^\circ = \frac{1}{2}\times(\sqrt{3})^2\times\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{4} \quad (答)$$

(2) $\angle\mathrm{A} = 60^\circ$であるから，AB : AC $= 2:1$のとき，

$$\angle\mathrm{C} = 90^\circ,\quad \mathrm{CQ} = (内接円の半径) = 1$$

となる。(1)の考察より

$$\mathrm{AP} = \mathrm{AQ} = \sqrt{3}$$

であるから，$\triangle$ABCの面積S_2は

$$S_2 = \frac{1}{2}\cdot\mathrm{AC}\cdot\mathrm{BC} = \frac{1}{2}(1+\sqrt{3})\cdot\sqrt{3}(1+\sqrt{3}) = 3+2\sqrt{3} \quad (答)$$

(3) AB $= 3$のとき

$$\mathrm{BP} = 3-\sqrt{3}$$

CQ $= x$とおき，$\triangle$ABCに余弦定理を適用すると

$$(x+3-\sqrt{3})^2 = 3^2 + (x+\sqrt{3})^2 - 2\cdot 3\cdot(x+\sqrt{3})\cdot\cos 60^\circ$$

$$(x+\sqrt{3})^2 + 2(3-2\sqrt{3})(x+\sqrt{3}) + (3-2\sqrt{3})^2$$
$$= 9 + (x+\sqrt{3})^2 - 3(x+\sqrt{3})$$

$$(9-4\sqrt{3})(x+\sqrt{3}) = 9-(3-2\sqrt{3})^2 = 12\sqrt{3}-12$$

$$\therefore\quad x+\sqrt{3} = \frac{12(\sqrt{3}-1)(9+4\sqrt{3})}{(9-4\sqrt{3})(9+4\sqrt{3})} = \frac{12(3+5\sqrt{3})}{81-48}$$
$$= \frac{4(3+5\sqrt{3})}{11}$$

$\triangle$ABCの面積S_3は

$$S_3 = \frac{1}{2}\cdot 3\cdot(x+\sqrt{3})\cdot\sin 60^\circ = \frac{9(5+\sqrt{3})}{11} \quad (答)$$

$\boxed{11}$

(1) $\triangle$ABC において余弦定理より

$$\mathrm{AC}^2 = 8^2 + 5^2 - 2\cdot 8\cdot 5\cdot \cos 60^\circ = 64 + 25 - 40 = 49$$

$$\therefore\ \mathrm{AC} = \boxed{7}\ (ア)$$

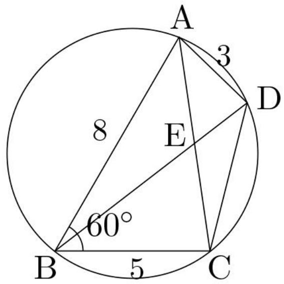
$\triangle$ABC の面積 S は

$$S = \frac{1}{2}\cdot 8\cdot 5\cdot \sin 60^\circ = \underset{(イ)}{\boxed{10}}\sqrt{\underset{(ウ)}{\boxed{3}}}$$

$\triangle$ABC の内接円の半径を r とおき，S を 2 通りに表すと，

$$\frac{1}{2}\cdot 8\cdot r + \frac{1}{2}\cdot 5\cdot r + \frac{1}{2}\cdot 7\cdot r = 10\sqrt{3} \qquad \therefore\ r = \sqrt{\boxed{3}}\ (エ)$$

(2) 正弦定理より，$\triangle$ABC の外接円の半径 R は



$$R = \frac{7}{2\sin 60^\circ} = \frac{7}{\sqrt{3}} = \frac{\overset{(オ)}{\boxed{7}}}{\underset{(カ)}{\boxed{3}}}\sqrt{\underset{(キ)}{\boxed{3}}}$$

(3) 四角形 ABCD は円に内接するから

$$\angle\mathrm{ADC} = 180^\circ - \angle\mathrm{ABC} = 120^\circ$$

$\mathrm{CD} = x$ とおき，$\triangle$ACD に余弦定理を適用すると

$$7^2 = x^2 + 3^2 - 2\cdot x\cdot 3\cdot \cos 120^\circ$$

$$x^2 + 3x - 40 = 0$$

$$(x+8)(x-5) = 0$$

$x = \mathrm{CD} > 0$ より

$$\mathrm{CD} = \boxed{5}\ (ク)$$

(4) $\angle\mathrm{BAD} = \alpha$ とおくと，

$$\angle\mathrm{BCD} = 180^\circ - \alpha$$

$\triangle$ABD および $\triangle$BCD に余弦定理を適用すると

$$\mathrm{BD}^2 = 8^2 + 3^2 - 2\cdot 8\cdot 3\cdot \cos\alpha = 5^2 + 5^2 - 2\cdot 5\cdot 5\cdot \cos(180^\circ - \alpha)$$

補角の公式より $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos\alpha$ であるから

$$64 + 9 - 48\cos\alpha = 25 + 25 + 50\cos\alpha \qquad \therefore\ \cos\alpha = \frac{\boxed{23}\ (ケ)}{\boxed{98}\ (コ)}$$

このとき，

$$\mathrm{BD} = \sqrt{64 + 9 - 48\cdot\frac{23}{98}} = \frac{\sqrt{73\cdot 49 - 24\cdot 23}}{7} = \frac{\sqrt{3025}}{7} = \frac{\overset{(サ)}{\boxed{55}}}{\underset{(シ)}{\boxed{7}}}$$

（注） 本問では，たまたま BC = CD なので，

$$\angle\mathrm{BAC} = \angle\mathrm{CAD} = \theta$$

とおいて，△ABC または △ACD に余弦定理を適用することにより

$$\cos\theta = \frac{8^2 + 7^2 - 5^2}{2\cdot 8\cdot 7} = \frac{11}{14}$$

2 倍角の公式より

$$\cos\angle\mathrm{BAD} = \cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = \cdots = \frac{\boxed{23}^{\,(ケ)}}{\boxed{98}_{\,(コ)}}$$

と求めることもできる。

(5) BE : ED = △ABC : △ACD = AB・BC : AD・DC = 8 × 5 : 3 × 5 = 8 : 3

であるから

$$\mathrm{ED} = \frac{3}{8+3}\mathrm{BD} = \frac{3}{11}\cdot\frac{55}{7} = \frac{15}{7}$$

同様に，

$$\mathrm{AE} : \mathrm{EC} = \triangle\mathrm{ABD} : \triangle\mathrm{BCD} = 8\times 3 : 5\times 5 = 24 : 25$$

であるから

$$\mathrm{AE} = \frac{24}{24+25}\mathrm{AC} = \frac{24}{49}\times 7 = \frac{24}{7}$$

△AED において余弦定理より

$$\cos\angle\mathrm{AED} = \frac{\left(\frac{24}{7}\right)^2 + \left(\frac{15}{7}\right)^2 - 3^2}{2\cdot\frac{24}{7}\cdot\frac{15}{7}} = \frac{576 + 225 - 441}{2\times 24\times 15} = \frac{\overset{(ス)}{\boxed{1}}}{\underset{(セ)}{\boxed{2}}}$$

$\boxed{12}$ 四角形 ADBC は円に内接するから

$$\angle\mathrm{QDA} = \angle\mathrm{ACB}$$

点 Q の定め方より $\angle\mathrm{DQA} = \angle\mathrm{CAB}$ であるから

$$\triangle\mathrm{QAD} \backsim \triangle\mathrm{ABC} \qquad \therefore\ \frac{\mathrm{QD}}{\mathrm{AD}} = \frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{BC}}$$

ところで，$\angle\mathrm{DBA} = \angle\mathrm{ABC}$ より

$$\mathrm{AD} = \mathrm{AC} = \boxed{\ b\ }\ (\text{ア})$$

であるから，

$$\mathrm{QD} = \frac{b}{a}\cdot b = \boxed{\frac{b^2}{a}}\ (\text{イ})$$

$\angle\mathrm{BQA} = \angle\mathrm{BAC}$，$\angle\mathrm{QBA} = \angle\mathrm{ABC}$ より

$$\triangle\mathrm{QBA} \backsim \triangle\mathrm{ABC}$$

であるから，

$$\frac{\mathrm{QB}}{\mathrm{BA}} = \frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{BC}} \qquad \frac{\mathrm{QB}}{c} = \frac{c}{a} \qquad \therefore\ \mathrm{QB} = \boxed{\frac{c^2}{a}}\ (\text{ウ})$$

$$\mathrm{BD} = \mathrm{QB} - \mathrm{QD} = \boxed{\frac{c^2-b^2}{a}}\ (\text{エ})$$

$\angle\mathrm{PAD} = \angle\mathrm{PBC}$ より

$$\triangle\mathrm{PAD} \backsim \triangle\mathrm{PBC}$$

であるから，

$$\mathrm{DP} : \mathrm{CP} = \mathrm{AD} : \mathrm{BC} = \underset{(\text{オ})}{\boxed{\ b\ }} : \underset{(\text{カ})}{\boxed{\ a\ }}$$

$$\mathrm{CP} = \mathrm{AP} + \mathrm{AC} = \mathrm{AP} + \boxed{\ b\ }\ (\text{キ})$$

より

$$\mathrm{DP} = \frac{b}{a}\mathrm{CP} = \frac{b}{a}(\mathrm{AP}+b) = \underset{(\text{ク})}{\boxed{\frac{b}{a}}}\mathrm{AP} + \underset{(\text{ケ})}{\boxed{\frac{b^2}{a}}}$$

$$\mathrm{BP} = \mathrm{DP} + \mathrm{BD} = \frac{b}{a}(\mathrm{AP}+b) + \frac{c^2-b^2}{a} = \frac{b}{a}\mathrm{AP} + \frac{c^2}{a}$$

方べきの定理より

$$\mathrm{DP}\cdot\mathrm{BP} = \mathrm{AP}\cdot\mathrm{CP}$$

であるから，

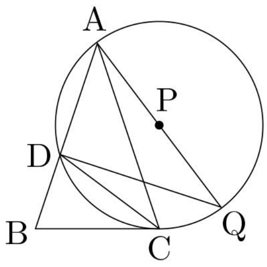
$$b\left(\frac{b}{a}\mathrm{AP} + \frac{c^2}{a}\right) = a\,\mathrm{AP}$$

$$b^2\mathrm{AP} + bc^2 = a^2\mathrm{AP} \qquad \therefore\ \mathrm{AP} = \boxed{\frac{bc^2}{a^2-b^2}}\ (\text{コ})$$

$\boxed{13}$

(1) $AB = AC$ と $\triangle ABC \backsim \triangle CDB$ より

$$BC = DC \qquad \therefore \ \angle CBD = \angle CDB$$



$\angle CDB$ は鋭角であるから

$$\angle ADC \text{ は鈍角}$$

である。以下，鈍角三角形の外心が三角形の外部にあることを示す。

AP の延長と $\triangle ACD$ の外接円との交点を Q とすると，AQ は直径であるから，

$$\angle ADQ = 90^\circ < \angle ADC$$

円周角の性質より

$$\angle AQD = \angle ACD$$

であり，どの三角形も内角の大きさの和は 180° であるから

$$\angle DAQ > \angle DAC$$

中心 P は AQ 上にあるから，点 P は $\triangle ADC$ の外部にある。 (証明おわり)

(2) 中心角と円周角の関係を考えて

$$\angle AOC = 2\angle ABC \qquad \cdots\cdots ①$$

$$\angle APC = 2\angle AQC \qquad \cdots\cdots ②$$

$BC = CD$ より

$$\angle ABC = \angle BDC \qquad \cdots\cdots ③$$

四角形 ADCQ は 1 つの円に内接するから対角は互いに補角であり，

$$\angle AQC = 180^\circ - \angle ADC = \angle BDC \qquad \cdots\cdots ④$$

①, ②, ③, ④より

$$\angle AOC = 2\angle ABC = 2\angle BDC = 2\angle AQC = \angle APC$$

(証明おわり)

(3) $\triangle ABC \backsim \triangle CDB$ であるから，$\triangle CDB$ の外心を R とすると

$$\angle DRC = \angle AOC \qquad \cdots\cdots ⑤$$

$OA = OC$ より $\angle OAC = \angle OCA$ であるから

$$\angle AOC = 180^\circ - 2\angle OAC \qquad \cdots\cdots ⑥$$

$\angle OAB = \angle OAC$ より

$$2\angle OAC = \angle DAC \qquad \cdots\cdots ⑦$$

⑤, ⑥, ⑦より

$$\angle DRC = 180^\circ - \angle DAC$$

よって，4 点 A, D, R, C は同一円周上にあり，特に $\triangle CDB$ の外心 R は $\triangle ADC$ の外接円上にある。 (証明おわり)

$\boxed{14}$

（**1**）　$(x+y)(x-y)=p$

p は素数であり，

$$0<x-y<x+y$$

であるから，

$$x-y=1 \text{ かつ } x+y=p$$

$$\therefore\ x=\frac{p+1}{2},\quad y=\frac{p-1}{2} \quad \text{(答)}$$

（**2**）　$(x-y)(x^2+xy+y^2)=p$

$x \geqq 1$，$y \geqq 1$ より

$$x^2+xy+y^2 \geqq 3$$

であり，p が素数であることを考えると，

$$x-y=1 \text{ かつ } x^2+xy+y^2=p$$

x を消去すると

$$\begin{aligned} p &= (y+1)^2+(y+1)y+y^2 \\ &= 3y^2+3y+1 \\ &= 3y(y+1)+1 \end{aligned}$$

y と $y+1$ の一方は 2 で割り切れ，3 と 2 は互いに素であるから，

$$3y(y+1) \text{ は } 6 \text{ の倍数}$$

であり，p を 6 で割った余りは 1 である。　（証明おわり）

（**3**）（２）の考察より，題意の素数 p の条件は

$$p=3y(y+1)+1 \ (\text{かつ } x=y+1)$$

を満たす自然数 $(x,\ )\,y$ が存在することである。

$f(y)=3y(y+1)+1$ とおくと

$$\begin{aligned} f(1) &= 3\times1\times2+1=7 \ (\text{素数}) \\ f(2) &= 3\times2\times3+1=19 \ (\text{素数}) \\ f(3) &= 3\times3\times4+1=37 \ (\text{素数}) \\ f(4) &= 3\times4\times5+1=61 \ (\text{素数}) \\ f(5) &= 3\times5\times6+1=91=7\times13 \\ f(6) &= 3\times6\times7+1=127 \ (\text{素数}) \end{aligned}$$

であるから，条件を満たす素数の 5 番目 p_5 は

$$p_5=127 \quad \text{(答)}$$

$\boxed{15}$

$$
\begin{aligned}
(2\times3\times5\times7\times11\times13)^{10} &= \{6\times5\times7\times(12^2-1^2)\}^{10}\\
&= (210\times143)^{10}\\
&= 30030^{10}\\
&= 3^{10}\times10010^{10}
\end{aligned}
$$

ここで，直接計算により

$$3^{10}=59049$$

二項定理により

$$
\begin{aligned}
10010^{10} &= (10^4+10)^{10}\\
&= \sum_{k=0}^{10} {}_{10}\mathrm{C}_k\cdot10^{4(10-k)}\cdot10^k\\
&= \sum_{k=0}^{10} {}_{10}\mathrm{C}_k\cdot10^{40-3k}\\
&= 10^{40}+10\times10^{37}+45\times10^{34}+120\times10^{31}+210\times10^{28}\\
&\qquad +252\times10^{25}+210\times10^{22}+\cdots+10^{10}\\
&< 10^{40}+10^{38}+10^{36}\times9<10^{40}+2\times10^{38}
\end{aligned}
$$

であり，

$$5\times10^4<3^{10}<6\times10^4$$
$$10^{40}<10010^{10}<1.02\times10^{40}$$

であるから，

$$5\times10^{44}<(2\times3\times5\times7\times11\times13)^{10}<6.12\times10^{44}$$
$$\therefore\quad 10^{44}<(2\times3\times5\times7\times11\times13)^{10}<10^{45}$$

したがって，10 進法表示で

$(2\times3\times5\times7\times11\times13)^{10}$ は 45 桁　(答)

である。

(注)　$\displaystyle\sum_{k=0}^{10}$ は単に記号として用いているのみである。

$\boxed{16}$

(1) 自然数 a は

$$a = 3k,\ \ 3k \pm 1 \quad (k\text{ は整数})$$

のいずれかに表され,

$$(3k)^2 = 3(3k^2),\ \ (3k \pm 1)^2 = 3(3k^2 \pm 2k) + 1$$

となるから，a^2 を 3 で割った余りは 0 または 1 である。 (証明おわり)

(2) (1)より，$a^2 + b^2$ を 3 で割った余りは

a^2	0	0	1	1
b^2	0	1	0	1
$a^2 + b^2$	0	1	1	2

で起こり得るすべてであり，このうち $a^2 + b^2$ が 3 で割り切れるのは，$a,\ b$ がともに 3 で割り切れる場合に限られる。このとき,

$$a = 3m,\ \ b = 3n \quad (m,\ n\text{ は自然数})$$

と表され，$a^2 + b^2 = 3c^2$ より

$$c^2 = \frac{(3m)^2 + (3n)^2}{3} = 3(m^2 + n^2)$$

は 3 で割り切れるが，3 は素数であるから，c も 3 で割り切れる。 (証明おわり)

(3) $a^2 + b^2 = 3c^2$ を満たす自然数 $a,\ b,\ c$ が存在すると仮定する。(2)も考えると,

$$gcd(a,\ b) = 3^k d \quad (k,\ d\text{ は自然数，}d\text{ は 3 で割り切れない})$$

と表され，特に

$$3^{2k} \mid a^2 \ \text{ かつ }\ 3^{2k} \mid b^2$$

が成り立つ。$a^2 + b^2 = 3c^2$ より

$$3^{2k} \mid 3c^2,\ \text{したがって}\ \ 3^{2(k-1)+1} \mid c^2$$

であるが，3 は素数であるから，素因数分解を考えると

$$3^k \mid c$$

よって，$\dfrac{a}{3^k},\ \dfrac{b}{3^k},\ \dfrac{c}{3^k}$ はすべて自然数であり,

$$\left(\frac{a}{3^k}\right)^2 + \left(\frac{b}{3^k}\right)^2 = 3\left(\frac{c}{3^k}\right)^2$$

が成り立つが，k の最大性より $\dfrac{a}{3^k}$ と $\dfrac{b}{3^k}$ の少なくとも一方は 3 で割り切れないから，(2)に反する。

以上により，$a^2 + b^2 = 3c^2$ を満たす自然数 $a,\ b,\ c$ は存在しない。 (証明おわり)

$\boxed{17}$

(1) $x \neq 0,\ y \neq 0$ のもとで，$\dfrac{2}{x} + \dfrac{4}{y} = 1$ を変形すると

$$2y + 4x = xy \qquad \therefore\ (x-2)(y-4) = 8$$

整数の積が 8 となる組み合わせを考え，

$$(x-2,\ y-4) = (1,\ 8),\ (2,\ 4),\ (4,\ 2),\ (8,\ 1),\ (-1,\ -8),$$
$$(-4,\ -2),\ (-2,\ -4),\ (-8,\ -1)$$

$x \neq 0,\ y \neq 0$ を考えて，

$$(x,\ y) = (3,\ 12),\ (4,\ 8),\ (6,\ 6),\ (10,\ 5),\ (1,\ -4),\ (-2,\ 2),\ (-6,\ 3)$$

の $\underset{(13)}{\boxed{7}}$ 組あり，

x が最大となる組は $(x,\ y) = (\underset{(14)}{\boxed{10}},\ \underset{(15)}{\boxed{5}})$

x が最小となる組は $(x,\ y) = (\underset{(16)}{\boxed{-6}},\ \underset{(17)}{\boxed{3}})$

(2) $x^2 + 3xy + 2y^2 = (x+y)(x+2y)$ を考え，

$$x^2 + 3xy + 2y^2 - 6x - 8y = (x+y+a)(x+2y+b) + c$$

とおき，係数を比べると

$$\begin{cases} a + b = -6 \\ 2a + b = -8 \\ ab + c = 0 \end{cases} \qquad \therefore\ a = -2,\ b = -4,\ c = -8$$

$$\therefore\ (x+y-2)(x+2y-4) = 8$$

(1)より

$$(x+y-2,\ x+2y-4) = (1,\ 8),\ (2,\ 4),\ (4,\ 2),\ (8,\ 1),\ (-1,\ -8),$$
$$(-4,\ -2),\ (-2,\ -4),\ (-8,\ -1)$$

$x + y \neq 0,\ x + 2y \neq 0$ の制約がないことと

$$x = 2(x+y-2) - (x+2y-4)$$
$$y = (x+2y-4) - (x+y-2) + 2$$

より $\underset{(18)}{\boxed{8}}$ 組すべてから整数解が得られる。

$x = 2(x+y-2) - (x+2y-4)$ が最大となる組は，

$(x+y-2,\ x+2y-4) = (8,\ 1)$ より $(x,\ y) = (\underset{(19)}{\boxed{15}},\ \underset{(20)}{\boxed{-5}})$

$x = 2(x+y-2) - (x+2y-4)$ が最小となる組は，

$(x+y-2,\ x+2y-4) = (-8,\ -1)$ より $(x,\ y) = (\underset{(21)}{\boxed{-15}},\ \underset{(22)}{\boxed{9}})$

$\boxed{18}$

問 1　$1 \leqq x \leqq y \leqq z$ より

$$xy \leqq zx \leqq yz$$

であるから，①より

$$0 + yz + 0 < pxyz \leqq yz + yz + yz = 3yz$$

$$\therefore \ 1 < px \leqq 3$$

$p \geqq 1,\ x \geqq 1$ より

$$p \leqq px \leqq 3$$

（おわり）

問 2　問 1 の考察より $1 < px \leqq 3$ であるから

$$(p,\ x) = (1,\ 2),\ (2,\ 1),\ (1,\ 3),\ (3,\ 1)$$

に限られる。

(i)　$(p,\ x) = (1,\ 2)$ のとき

$$2y + yz + 2z = 2yz$$

$$yz - 2y - 2z = 0 \qquad \therefore \ (y-2)(z-2) = 4$$

$x - 2 = 0 \leqq y - 2 \leqq z - 2$ より

$$(y-2,\ z-2) = (1,\ 4),\ (2,\ 2)$$

$$\therefore \ (y,\ z) = (3,\ 6),\ (4,\ 4)$$

(ii)　$(p,\ x) = (2,\ 1)$ のとき

$$y + yz + z = 2yz$$

$$yz - y - z = 0 \qquad \therefore \ (y-1)(z-1) = 1$$

$x - 1 = 0 \leqq y - 1 \leqq z - 1$ より

$$y - 1 = z - 1 = 1 \qquad \therefore \ y = z = 2$$

(iii)　$(p,\ x) = (1,\ 3)$ のとき

$$3y + yz + 3z = 3yz$$

$$yz = \frac{3}{2}y + \frac{3}{2}z$$

$$\left(y - \frac{3}{2}\right)\left(z - \frac{3}{2}\right) = \frac{9}{4}$$

$$\therefore \ (2y-3)(2z-3) = 9$$

$2x - 3 = 3 \leqq 2y - 3 \leqq 2z - 3$ より

$$2y - 3 = 2z - 3 = 3 \qquad \therefore \ y = z = 3$$

(iv)　$(p,\ x) = (3,\ 1)$ のとき

$$y + yz + z = 3yz$$

$$yz = \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z$$

$$\left(y - \frac{1}{2}\right)\left(z - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$$

$$\therefore\ (2y-1)(2z-1)=1$$

$2x-1=1 \leqq 2y-1 \leqq 2z-1$ より

$$2y-1=2z-1=1 \qquad \therefore\ y=z=1$$

以上より，求める自然数の組は

$$\begin{aligned}(p,\ x,\ y,\ z)=&(1,\ 2,\ 3,\ 6),\ (1,\ 2,\ 4,\ 4),\ (2,\ 1,\ 2,\ 2),\\&(1,\ 3,\ 3,\ 3),\ (3,\ 1,\ 1,\ 1)\end{aligned}$$

(答)

$\boxed{19}$

(1) 相異なる 5 つの数字を用いて 5 桁の数を作るとき

$$5! = 120 \text{ 通り}$$

同じ数字を 1 組だけ含むとき，2 つ含むのが 1 であるか 5 であるか，その 2 つを何桁目に置くかを決め，残り 3 数の並べ方を考えて，

$$2 \times {}_5C_2 \times 4 \times 3 \times 2 = 480 \text{ 通り}$$

同じ数字を 2 組とも含むとき，1 と 5 の置き場所と残り 1 つの数を決めて，

$${}_5C_2 \times {}_3C_2 \times 3 = 90 \text{ 通り}$$

以上をすべてたし合わせて，5 桁の数は全部で

$$120 + 480 + 90 = \underset{(ソ)}{\boxed{690}} \text{ 通り}$$

(i) 先頭が 1 である 5 桁の数は，

下 4 桁が相異なるものが ${}_5P_4 = 5 \times 4 \times 3 \times 2 = 120$ 通り

5 を 2 つ用いるものが ${}_4C_2 \times {}_4P_2 = 6 \times 12 = 72$ 通り

(ii) 上 2 桁が 21 である 5 桁の数は，

下 3 桁が相異なるものが ${}_4P_3 = 24$ 通り，

5 を 2 つ含むものが ${}_3C_2 \times 3 = 9$ 通り

(iii) 上 3 桁が 231 のものを直接書き並べると

23114， 23115， 23141， 23145， ⋯⋯

(i), (ii), (iii)をあわせて

$$23145 \text{ は } 120 + 72 + 24 + 9 + 4 = \underset{(タ)}{\boxed{229}} \text{ 番目}$$

(2)(i) 5 つの相異なる数字を用いるとき

$$5! = 120 \text{ 通り}$$

(ii) 同じ数字を 1 組だけ含むとき

1 または 5 を選び，残り 3 桁を先に決めたあとに隣り合わないように入れると考え，

$$2 \times {}_4P_3 \times {}_4C_2 = 288 \text{ 通り}$$

(iii) 同じ数字を 2 組含むとき

1515 または 5151 と並ぶのは 3×5 通り

1551 または 5115 と並ぶのは 3 通り

であり，1155 または 5511 と並ぶときは隣り合わないようにはできないから，

$$3 \times 5 \times 2 + 3 \times 2 = 36 \text{ 通り}$$

(i), (ii), (iii)をあわせて

$$120 + 288 + 36 = \underset{(チ)}{\boxed{444}} \text{ 通り}$$

$\boxed{20}$

問 1．6 人それぞれが 3 通りずつの選択肢があるから

$$3^6 = \underset{(\text{アイウ})}{\boxed{729}} \text{ 通り}$$

問 2．6 人を 2 人以上の 2 つのグループに分けるのは

$$_6C_2 + \frac{_6C_3}{2} = 15 + 10 = \underset{(\text{エオ})}{\boxed{25}} \text{ 通り}$$

問 3．6 人を 1 人以上の 3 つのグループに分けると，

(i) 1 人，1 人，4 人と分けるときは，4 人組だけで決まるから

$$_6C_4 = 15 \text{ 通り}$$

(ii) 1 人，2 人，3 人と分けるときは，1 人組と 2 人組を決めると考えて

$$_6C_1 \times {_5C_2} = 60 \text{ 通り}$$

(iii) 2 人ずつ 3 組に分けるのは，同人数による重複に注意して

$$\frac{_6C_2 \times {_4C_2}}{3!} = \frac{15 \times 6}{6} = 15 \text{ 通り}$$

以上より

$$15 + 60 + 15 = \underset{(\text{カキ})}{\boxed{90}} \text{ 通り}$$

(別解) 問 1 で求めた 3^6 通りから，全員が 1 部屋に集まる場合とちょうど 2 部屋に分かれる場合を除くことにより，A, B, C のどの部屋にも人が入る分け方は

$$3^6 - 3 - {_3C_2} \times (2^6 - 2) = 3\times(3^5 - 1 - 62) = 540 \text{ 通り}$$

A, B, C の区別をなくして

$$\frac{540}{3!} = \underset{(\text{カキ})}{\boxed{90}} \text{ 通り}$$

問 4．(i) 全員が 1 部屋に集まるのは

3 通り

(ii) 男女 2 人ずつと男女 1 人ずつの 2 部屋ができるとき，

部屋の決め方が $_3P_2 = 3 \times 2 = 6$ 通り

「男女 1 人ずつ」の決め方が $3 \times 3 = 9$ 通り

あるから，

$$6 \times 9 = 54 \text{ 通り}$$

(iii) どの部屋も男女 1 人ずつとなるとき

$$3! \times 3! = 36 \text{ 通り}$$

以上より

$$3 + 54 + 36 = \underset{(\text{クケ})}{\boxed{93}} \text{ 通り}$$

$\boxed{21}$

(1) 1, 2, 3 の位置へのカードの置き方は

$${}_9\mathrm{P}_3 = 9 \times 8 \times 7 \text{ 通り}$$

あり，その各場合は同様に確からしい。そのうち，1 行目に赤 2 枚，黒 1 枚と並ぶような置き方は，赤黒の配列と選び方を考え，

$$3 \times (3 \times 2) \times 3 \text{ 通り}$$

あるから，求める確率は

$$\frac{3 \times (3 \times 2) \times 3}{9 \times 8 \times 7} = \frac{\overset{(\text{ア})}{\boxed{3}}}{\underset{(\text{イ})(\text{ウ})}{\boxed{2}\boxed{8}}}$$

(2) どの行に赤 3 枚並ぶか，赤および赤以外のカードをどの順に引くかを考え，1 つの行に赤のカードが 3 枚並ぶ確率は

$$\frac{3 \times 3! \times 6!}{9!} = \frac{3 \times 6}{9 \times 8 \times 7} = \frac{\overset{(\text{エ})}{\boxed{1}}}{\underset{(\text{オ})(\text{カ})}{\boxed{2}\boxed{8}}}$$

(3) 各行が同色である確率は

$$\frac{3! \times (3!)^3}{9!} = \frac{6^3}{9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4} = \frac{1}{280}$$

1 つの行だけに同じ色のカードが 3 枚並ぶ確率は

$$3 \times \left(\frac{1}{28} - \frac{1}{280}\right) = 3 \times \frac{10 - 1}{280} = \frac{\overset{(\text{キ})(\text{ク})}{\boxed{2}\boxed{7}}}{\underset{(\text{ケ})(\text{コ})(\text{サ})}{\boxed{2}\boxed{8}\boxed{0}}}$$

$\boxed{22}$ A を固定して，11 個の点の中から 2 個を選んだときの確率と考える。

（1） $\triangle$APQ が直角三角形となるのは，一辺が外接円の直径になるときであり，

- A が直径の端点のとき，A の直径対点と他の 1 点を選ぶと考えて
  10 通り
- PQ が直径のとき，A を端点としない直径を選ぶと考えて
  5 通り

であるから，求める確率は

$$\frac{10+5}{{}_{11}\mathrm{C}_2} = \frac{3}{11} \quad (答)$$

（2） AP $=$ AQ のとき

5 通り

AP $=$ PQ のとき，P がどこにあるかを考え，正三角形の場合を除くと

$(5-1) \times 2 = 8$ 通り

求める確率は

$$\frac{5+8}{{}_{11}\mathrm{C}_2} = \frac{13}{55} \quad (答)$$

（3） 点 O が $\triangle$APQ の内部または周上にあるのは，

$\triangle$APQ が鋭角三角形または直角三角形

になるときである。

鈍角三角形になるのは，最長辺に平行な直径ともう一つの頂点が最長辺に関して反対側にある場合であり，

- 点 A が最長辺の端点であるとき
  $(1+2+3+4) \times 2 = 20$ 通り
- PQ が最長辺であるとき
  $4+3+2+1 = 10$ 通り

であるから，$\triangle$APQ が鈍角三角形になる確率は

$$\frac{20+10}{{}_{11}\mathrm{C}_2} = \frac{6}{11}$$

求める確率は

$$1 - \frac{6}{11} = \frac{5}{11} \quad (答)$$

$\boxed{23}$

(ⅰ) 2 回の試行で点 A が原点から点 $(1,\ 1)$ に移るのは，

$(1,\ 0)$ の移動と $(0,\ 1)$ の移動が 1 回ずつ

の場合であるから，求める確率は

$$\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times 2=\frac{1}{3}\quad \text{(答)}$$

(ⅱ) 4 回の試行で $(0,\ 0)\to(2,\ 2)$ と移動するのは

$(1,\ 0)$ の移動と $(0,\ 1)$ の移動が 2 回ずつ

の場合であるから，求める確率は

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^2\times {}_4\mathrm{C}_2=\frac{1}{6}\quad \text{(答)}$$

(ⅲ) 6 回の試行で $(0,\ 0)\to(2,\ 2)$ と移動するのは

$(1,\ 0)$ の移動，$(0,\ 1)$ の移動，および停止が 2 回ずつ

の場合であるから，求める確率は

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{1}{6}\right)^2\times {}_6\mathrm{C}_2\times {}_4\mathrm{C}_2=\frac{5}{72}\quad \text{(答)}$$

(ⅳ) 3 回目で初めて点 $(1,\ 1)$ に到達するのは，

1 回目または 2 回目が停止，あとは $(1,\ 0)$ と $(0,\ 1)$ の移動が 1 回ずつ

の場合であるから，求める確率は

$$\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{6}\times 2\times 2=\frac{1}{9}\quad \text{(答)}$$

(ⅴ) 5 回目で初めて点 $(2,\ 2)$ に到達するのは，

4 回目までのうち 1 回が停止，あとは $(1,\ 0)$ と $(0,\ 1)$ の移動が 2 回ずつ

の場合であるから，求める確率は

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot\frac{1}{6}\times 4\times {}_4\mathrm{C}_2=\frac{1}{9}\quad \text{(答)}$$

$\boxed{24}$

問 1　4 回の移動で A が原点にいるのは，表裏 2 回ずつ出る場合であるから，求める確率は

$$\left(\frac{1}{2}\right)^4 \times {}_4\mathrm{C}_2 = \frac{\boxed{3}^{(ア)}}{\boxed{8}_{(イ)}}$$

問 2　A の座標を a，B の座標を b として

$$d = a - b$$

とすると，最初は $d = 2$ であり，毎回

$$+1 - (+2) = -1 \quad (表)$$
$$-1 - (-2) = +1 \quad (裏)$$

のいずれかだけ変化する。

4 回の移動で A と B が同じ座標にいるのは，表が 3 回，裏が 1 回出る場合だけであるから，求める確率は

$$\left(\frac{1}{2}\right)^4 \times 4 = \frac{\boxed{1}^{(ウ)}}{\boxed{4}_{(エ)}}$$

問 3　4 回の移動で 1 度でも $d < 0$ となることがあるのは，4 回の試行で d が

$$2 \to 1 \to 0 \to -1 \to -2 \text{ または } 2 \to 1 \to 0 \to -1 \to 0$$

と変化するとき，すなわち，初めから 3 回続いて表が出る場合であるから，求める確率は

$$\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{\boxed{1}^{(オ)}}{\boxed{8}_{(カ)}}$$

$\boxed{25}$

(1) 動点 P が A から出発して 4 秒後に G にいるのは，

$$\mathrm{A} \to \mathrm{B} \to \mathrm{C} \to \mathrm{D} \to \mathrm{G} \ \text{ または } \ \mathrm{A} \to \mathrm{F} \to \mathrm{E} \to \mathrm{D} \to \mathrm{G}$$

と移動する場合であるから，確率は

$$\left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \frac{1}{3} \times 2 = \frac{\boxed{1}^{(53)}}{\boxed{12}_{(54)(55)}}$$

(2) 動点 P が A を出発して 3 秒後には B，D，F のいずれかにいることに注意して，その 2 秒後に D にいる確率を求める。

(i) 3 秒後に B，5 秒後に D にいるのは

$$\mathrm{A} \to \mathrm{B} \to \mathrm{C} \to \mathrm{B} \to \mathrm{C} \to \mathrm{D}$$
$$\mathrm{A} \to \mathrm{B} \to \mathrm{A} \to \mathrm{B} \to \mathrm{C} \to \mathrm{D}$$
$$\mathrm{A} \to \mathrm{F} \to \mathrm{A} \to \mathrm{B} \to \mathrm{C} \to \mathrm{D}$$

のいずれかの移動をする場合であるから，確率は

$$\left(\frac{1}{2}\right)^5 \times 3 = \frac{3}{32}$$

(ii) 3 秒後に F，5 秒後に D にいる場合，(i)と同様に考えて

確率は $\dfrac{3}{32}$

(iii) 3 秒後に D にいるのは

$$\mathrm{A} \to \mathrm{B} \to \mathrm{C} \to \mathrm{D} \ \text{ または } \ \mathrm{A} \to \mathrm{F} \to \mathrm{E} \to \mathrm{D}$$

と移動する場合であり，そのそれぞれに対して 2 秒後にまた D にいるのは

$$\mathrm{D} \to \mathrm{C} \to \mathrm{D} \ \text{ または } \ \mathrm{D} \to \mathrm{E} \to \mathrm{D} \ \text{ または } \ \mathrm{D} \to \mathrm{G} \to \mathrm{D}$$

と移動する場合であるから，確率は

$$\left(\frac{1}{2}\right)^3 \times 2 \times \left(\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 2 + \frac{1}{3} \times 1\right) = \frac{1}{6}$$

(i), (ii), (iii)は互いに排反であり，題意の事象はそのいずれかであるから，求める確率は

$$\frac{3}{32} \times 2 + \frac{1}{6} = \frac{9+8}{48} = \frac{\boxed{17}^{(56)(57)}}{\boxed{48}_{(58)(59)}}$$

(3) (2)の考察より，B または F にいる動点 P が 2 秒後にまた B，F のいずれかにいるような移動は 3 通りある。$2n+1$ 秒後に移動を終了しないのは，

奇数秒後に動点 P がつねに B または F にいる

場合であり，その余事象の確率が求める確率であるから

$$1 - \left\{\left(\frac{1}{2}\right)^2 \times 3\right\}^n = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n = \frac{\overset{(60)}{\boxed{4}}{}^n - \overset{(61)}{\boxed{3}}{}^n}{\underset{(62)}{\boxed{4}}{}^n}$$