$\boxed{1}$ **（倍数）**

(1)　a を 0 でない整数とする。a の倍数は和，差，積について閉じていることを示せ。

(2)　自然数 n について，

$$n \text{ が } 3 \text{ の倍数} \iff n \text{ の(10進法表示で)各位の数の和が } 3 \text{ の倍数}$$

　であることを示せ。

(3)　n が奇数のとき，n^2-1 は 8 の倍数であることを示せ。

$\boxed{2}$ **（整数の除法）**

(1)　a が任意の整数で，b が正の整数ならば,

$$a = bq + r, \quad 0 \leqq r < b$$

　を満たす整数 q，r がただ一組だけ存在することを示せ。

(2)　3 桁の 7 の倍数(自然数)の個数を求めよ。

$\boxed{3}$ **（最小公倍数，最大公約数）**

a, b を正の整数とし，a と b の最小公倍数を l，最大公約数を m をするとき，次の各性質を証明せよ。

(1) a と b の公倍数は l の倍数である。

(2) a と b の公約数を d とすると，d と m の最小公倍数は m に一致する。すなわち，a と b の公約数は m の約数である。

(3) $ab = lm$

$\boxed{4}$ **（素数，互いに素）**

a, b を 0 でない整数とする。

(1) ab が素数 p で割り切れるならば，a または b は p で割り切れることを示せ。

(2) 「a と b は互いに素」と「$a+b$ と ab は互いに素」は同値であることを示せ。

(3) $a(a+1)(a+2)$ は 6 の倍数であることを示せ。

$\boxed{5}$ **（素因数分解）**

(1) 168 と 180 の最大公約数，最小公倍数を求めよ。

(2) 180 の正の約数の個数と正の約数の総和を求めよ。

(3) 正の整数 n の正の約数の個数が奇数であるためには，n が平方数であることが必要十分であることを証明せよ。

(4) $p,\ q,\ r$ を $p<q<r$ である素数とし，a を正の整数とするとき，

$$a(a+r)=p^2q^2$$

を満たす $(a,\ p,\ q,\ r)$ をすべて求めよ。

$\boxed{6}$ **（範囲の限定）**

(1) 2 次不等式 $x^2-7x-4<0$ を満たす整数を求めよ。

(2) $\dfrac{6x+1}{9x^2+2}$ が整数となるような実数 x の値をすべて求めよ。

(3) x の連立不等式

$$\begin{cases} x^2-ax<0 \\ 2x^2-3x-9<0 \end{cases}$$

の整数解がただ 1 つであるような実数 a の範囲を求めよ。

(4) $\dfrac{2}{3}<\dfrac{m}{n}<\dfrac{3}{4}$ を満たす有理数 $\dfrac{m}{n}$ $(m,\ n$ は正の整数$)$ の中で，分母 n が最小のものを求めよ。

(5) m を正の整数とする。m^3+3m^2+2m+6 はある正の整数の 3 乗である。m を求めよ。

$\boxed{7}$ **（１次の不定方程式）**

　次の方程式の整数解を求めよ。

(1)　$24x = 18y$

(2)　$2x + 4y = 1$

(3)　$3x - 5y = 7$

$\boxed{8}$ **（２次の不定方程式）**

(1)　$5x^2 + y^2 = 21$ を満たす正の整数 $(x,\ y)$ の組をすべて求めよ。

(2)　$2x^2 - 2xy + y^2 + x - 2y = 0$ を満たす整数 $(x,\ y)$ の組をすべて求めよ。

(3)　$mn - 2m + 4n - 20 = 0$ を満たす自然数 $(m,\ n)$ の組をすべて求めよ。

(4)　$a^2 + 7ab + 12b^2 + a + 3b - 9 = 0$ を満たす整数 $a,\ b$ の組 $(a,\ b)$ をすべて求めよ。

(5)　$\sqrt{n^2 + n - 1}$ が整数となるような整数 n をすべて求めよ。

$\boxed{9}$ **(余りの考察)**

(1) 任意の整数 n に対して，n^2+n+1 は 5 で割り切れないことを示せ。

(2) $a,\ b,\ c,\ d$ を整数とする。整式

$$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$$

において，$f(-1),\ f(0),\ f(1)$ がいずれも 3 で割り切れないならば，方程式 $f(x)=0$ は整数の解をもたないことを証明せよ。

(3) 3^{2003} を 11 で割った余りを求めよ。

(4) 3^{2003} (を 10 進法で表したとき) の下 5 桁を求めよ。

(5) n を正の整数とし，2000^n を 7 で割った余りを a_n とする。$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$ が 7 で割り切れる最小の n を求めよ。

$\boxed{10}$ **(余りと転換法・背理法)**

(1) 自然数 $a,\ b$ に対して，a^2+b^2 が 3 の倍数ならば，$a,\ b$ はともに 3 の倍数であることを証明せよ。

(2) 自然数 $a,\ b,\ c$ が $a^2+b^2=c^2$ を満たすとき，$a,\ b$ の少なくとも一方は偶数であることを証明せよ。

$\boxed{11}$ **（ユークリッドの互除法）**

(1)　0 でない整数 $a,\ b$ に対して，整数 $q,\ r$ を用いて $a=bq+r$ と表すとき

$$gcd(a,\ b)=gcd(b,\ r)$$

となることを示せ。

(2)　方程式 $2003x+15y=1$ の整数解を求めよ。

(3)　n を正の整数とする。n^2+2 が $2n+1$ の倍数になる n を求めよ。

$\boxed{12}$ **（$ax+by=1$ の定理）**

$a,\ b$ を互いに素な整数とするとき，

$$ax+by=1$$

を満たす整数 $x,\ y$ が存在することを証明せよ。

$\boxed{13}$ **（対称式の処理）**

(1) $abcd = a+b+c+d$ を満たす正の整数 $a,\ b,\ c,\ d$ をすべて求めよ。

(2) $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}>1$ を満たすような相異なる 2 以上の自然数 $a,\ b,\ c$ に対して，$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}$ がとり得る値をすべて求めよ。

$\boxed{14}$ **（格子点）**

(1) $a,\ b$ が互いの素な整数であるとき，2 点 O(0, 0), A(a, b) を結ぶ線分上には，両端を除いて格子点が存在しないことを示せ。

(2) △ABC の辺 AB, AC それぞれの上に両端を除いて奇数個の格子点があるとき，辺 BC 上にも両端を除いて奇数個の格子点があることを示せ。

(3) 格子点を頂点とする平行四辺形の内部に格子点がないとき，この平行四辺形の面積は 1 であることを示せ。

$\boxed{15}$ **（整数係数漸化式）**

数列 $\{a_n\}$ を漸化式

$$a_1 = 2,\ a_2 = 4,\ a_{n+2} = 4a_{n+1} + 2a_n\ (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

によって定める。

(1) a_n は整数であることを示せ。

(2) a_{2004} を 5 で割った余りを求めよ。

$\boxed{16}$ **（整数値多項式）**

$f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a,\ b,\ c$ は実数)に対して，$f(0),\ f(1),\ f(2)$ がいずれも整数であるとき，すべての整数 n に対して $f(n)$ は整数であることを示せ。

$\boxed{17}$ **（整数部分，小数部分）**

(1) $\sqrt{141}$ の整数部分を求めよ。

(2) 実数 x に対して，$[x]$ は x を超えない最大の整数を表すものとする。このとき，

$$[x] + \left[x + \frac{1}{2}\right] = [2x]$$

が成り立つことを証明せよ。

(3) n を自然数とするとき，$\dfrac{2^n}{3}$ の整数部分を(ガウス記号を使わない) n の式で表せ。

$\boxed{18}$ **（p進法）**

(1) 10 進法で 4444 と表された数を 3 進法で表せ。

(2) 3 進法で 10121 と表された数を 10 進法で表せ。

$\boxed{1}$ **確認**：1, 2, 3, $\cdots$ のように個数を数えたり，番号をつけるのに用いられる数を**自然数**という。自然数は和について閉じているが，差については閉じていない(自然数どうしの和は自然数になるが，差は自然数になるとは限らない)。そこで，

$$0\,(=1-1),\ \ -1\,(=1-2),\ \ -2\,(=1-3),\ \ -3\,(=1-4),\ \ \cdots\cdots$$

を追加して和・差について閉じるようにした数全体を**整数**という。

整数は和・差・積について閉じているが，商については一般に閉じていないことを考えて，2 つの整数 a, b の商 $\dfrac{a}{b}\,(b \neq 0)$ が整数であるとき，すなわち

$$a = bq \quad (q \text{ は整数})$$

と表されるとき，a は b で**割り切れる**，b は a を**割る**という。また，このとき a は b の**倍数**，b は a の**約数**といい，記号では $\boldsymbol{b}\,\big|\,\boldsymbol{a}$ と表す。

倍数の性質として重要なのは，b の倍数と任意の整数との積もまた b の倍数になることと，倍数も和・差について閉じていることである。

解答：

(1) a の倍数 am, an (m, n は整数) に対して

$$am+an=a(m+n),\quad am-an=a(m-n),\quad am\cdot an=a(amn)$$

となり，整数は和，差，積について閉じているから，a の倍数は和，差，積について閉じている。 (おわり)

(2) n を m 桁の自然数とし，各位の数字を a_k で表すと

$$\begin{aligned} n &= a_1\cdot 10^{m-1} + a_2\cdot 10^{m-2} + \cdots + a_{m-1}\cdot 10 + a_m \\ &= a_1(1+9b_{m-1}) + a_2(1+9b_{m-2}) + \cdots + a_{m-1}(1+9b_1) + a_m \\ &= a_1 + a_2 + \cdots + a_{m-1} + a_m + 9(a_1b_{m-1} + a_2b_{m-2} + \cdots + a_{m-1}b_1) \\ &= a_1 + a_2 + \cdots + a_{m-1} + a_m + 3(3a_1b_{m-1} + 3a_2b_{m-2} + \cdots + 3a_{m-1}b_1) \end{aligned}$$

(b_k は各位が 1 である k 桁の自然数)

であるから，

$$n \text{ が } 3 \text{ の倍数} \iff a_1 + a_2 + \cdots + a_{m-1} + a_m \text{ が } 3 \text{ の倍数}$$

(おわり)

(注) 上の議論より，9 の倍数についても同様のことが言える。

(3) 奇数 n は

$$n = 2k+1 \quad (k \text{ は整数})$$

と表されるから，

$$n^2-1 = (4k^2+4k+1)-1 = 4k(k+1)$$

k と $k+1$ のうち一方は偶数であるから，$k(k+1)$ は偶数であり，

$$n^2-1 \text{ は } 8 \text{ の倍数}$$

である。

(おわり)

$\boxed{2}$ **確認**：小学生のときに

$$13 \div 5 = 2 \text{ あまり } 3$$

と習ったが，これはよく考えてみるとおかしい。左辺は数値で右辺は事柄なので，等しいはずはないのである。そこで，中学以降では整数の除法を

$$a = bq + r,\quad 0 \leqq r < b$$

と表し，等式としての正しさとわかりやすさとを実現したのであった。ただし，整数は商について閉じていないので，これは厳密には除法ではない。あくまでも，**このような等式で表現することを習慣的に除法と呼んでいる**ということに注意する。このとき，r を (a を b で割ったときの)**余り**といい，誤解がなければ q を**商**と呼んで差し支えない。

高校で習う整式(多項式)の除法も，このような考え方・表し方を基礎としている。また，本問(2)のように答案としての説明の表現にも用いられる。

(1)では，上のような等式表現が可能であること，さらにその表現が一意であることを確かめる。

解答：

(1) 数直線を b の倍数で区切ると，実数全体を区間

$$qb \leqq x < (q+1)b \quad (q \text{ は整数})$$

で覆うことができる。よって，任意の整数 a に対して

$$qb \leqq a < (q+1)b$$

を満たす整数 q が存在する。このとき，$a - qb = r$ とおくと

$$a = qb + r,\quad 0 \leqq r < b$$

いま $a = sb + t$，$0 \leqq t < b$ を満たす整数 s，t があるとすれば，a を消去して

$$(q - s)b = t - r$$

$t - r$ は b の倍数となるが，その範囲より $0 \leqq |t - r| < b$ であるから，

$$t - r = 0 \qquad \therefore\ r = t$$

$b > 0$ であるから，$(q - s)b = 0$ より

$$q - s = 0 \qquad \therefore\ q = s$$

(おわり)

(2) $999 = 7 \times 142 + 5$ より

1 以上 999 以下の 7 の倍数は 142 個

$99 = 7 \times 14 + 1$ より

1 以上 99 以下の 7 の倍数は 14 個

よって，3 桁の 7 の倍数は

$142 - 14 = 128$ 個　(答)

$\boxed{3}$ **確認**：0 でない整数 a, b に対して，a の倍数かつ b の倍数であるような整数を a と b の**公倍数**という。公倍数の中で最小正のものを**最小公倍数**(**least common multiple**)といい，記号で $\boldsymbol{lcm(a,\ b)}$と表す。また，a の約数かつ b の約数であるような整数を a と b の**公約数**をいう。公約数の中で最大のものを**最大公約数**(**greatest common divisor**)といい，記号で $\boldsymbol{gcd(a,\ b)}$または略して $(a,\ b)$ と表す。ただし，$(a,\ b)$ は座標と混同される恐れがあるので，高校ではあまり用いられない。

本問で示す3つの定理は，最小公倍数と最大公約数についての重要な性質なので，結果はきちんと覚えておこう。

解答：

(1) a と b の公倍数を c とし，整数 q, r を

$$c = lq + r,\quad 0 \leqq r < l$$

により定める。$\left(\to \boxed{2}(1)\right)$ c も l も a の倍数であるから，$r = c - lq$ は a の倍数であり，同様に r は b の倍数でもあるから，r は a と b の公倍数である。

もし $0 < r < l$ とすると，l の最小性に反してしまうから，

$$r = 0 \qquad \therefore\ c = lq$$

よって，a と b の公倍数は最小公倍数 l の倍数である。 (おわり)

(2) $k = lcm(d,\ m) > 0$ とする。a, b はともに d の倍数かつ m の倍数であるから，(1)より，a と b はともに k の倍数，つまり k は a と b の公約数である。

$m = gcd(a,\ b)$ の最大性より

$$k \leqq m$$

$k\,(>0)$ は m の倍数であるから，

$$k \geqq m \qquad \therefore\ k = m$$

よって，a と b の公約数は最大公約数 m の約数である。 (おわり)

(3) ab は a と b の公倍数であるから，(1)より

$$ab = ld \quad (d\text{ は正の整数})$$

$l = a\alpha = b\beta$ とおくと

$$a = \beta d,\quad b = \alpha d \quad (\alpha,\ \beta\text{ は正の整数})$$

と表され，d は a と b の公約数となるから，(2)より

$$de = m \quad (e\text{ は正の整数})$$

と表される。

$$\frac{a}{m} = \frac{\beta}{e},\quad \frac{b}{m} = \frac{\alpha}{e}\ \text{ は整数}$$

となるから，e は α と β の公約数であり，もし $e > 1$ ならば

$$l = a\alpha = b\beta > a\frac{\alpha}{e} = b\frac{\beta}{e}$$

となって，l が a と b の最小公倍数であることに反する。

$$\therefore\ e = 1,\quad ab = lm$$ (おわり)

$\boxed{4}$ **確認**：1と自分自身のちょうど2つを正の約数にもつ自然数を**素数**という。この定義からすると1は素数ではないのだが，誤解を避ける(?)ために「2以上の整数で$\cdots$」と明記された書物も多い。約数で素数のものを特に**素因数**という。

素数の大きな特徴として（$p,\ a,\ b$が正の整数のとき）

$$p\text{ は素数} \iff p\text{ が }ab\text{ を割るならば，}p\text{ は }a\text{ または }b\text{ を割る}$$

という性質が成り立つ。本問(1)では $\Rightarrow$ を示すが，$\Leftarrow$ については，対偶を考えれば明らかである。2以上の整数$m,\ n$の積で表される整数mnを**合成数**という。

2つの整数$a,\ b$の最大公約数が1であるとき，aとbは**互いに素**であるという。素因数分解($\rightarrow \boxed{5}$)や互除法($\rightarrow \boxed{11}$)により実際に最大公約数が求められる場合もあるが，**互いに素であることを示すには，共通の素因数があるとして矛盾を導く**のが基本的である。また，aとbが互いに素なとき，$lcm(a,\ b)=ab$となることも重要である。

解答：

(1) aとpの最大公約数$gcd(a,\ p)$はpの約数であり，pは素数であるから，

$$gcd(a,\ p)=p\text{ または }1$$

$gcd(a,\ p)=p$のときaはpで割り切れる。

$gcd(a,\ p)=1$のとき，$p\big|ab$より

$$ap=lcm(a,\ p)\big|\,lcm(a,\ ab)=ab \qquad \therefore\ p\big|b$$

(おわり)

(2) pを素数とするとき，(1)の性質より

$$p\big|ab \iff p\big|a\text{ または }p\big|b$$

であるから，

$$\begin{aligned} p\big|a+b\text{ かつ }p\big|ab &\iff p\big|a+b\text{ かつ “}p\big|a\text{ または }p\big|b\text{”} \\ &\iff \text{“}p\big|a+b\text{ かつ }p\big|a\text{” または “}p\big|a+b\text{ かつ }p\big|b\text{”} \\ &\iff p\big|b\text{ かつ }p\big|a \end{aligned}$$

両辺を否定すると

$$a+b\text{ と }ab\text{ は互いに素} \iff a\text{ と }b\text{ は互いに素}$$

(おわり)

(3) aと$a+1$の一方は偶数であるから，$a(a+1)$は偶数であり，

$$a(a+1)(a+2)\text{ は偶数 (2 の倍数)}$$

である。$a,\ a+1,\ a+2$のうちの1つは3の倍数であるから，

$$a(a+1)(a+2)\text{ は 3 の倍数}$$

である。2と3は互いに素であるから，2の倍数かつ3の倍数は6の倍数であり，

$$a(a+1)(a+2)\text{ は 6 の倍数である。}$$

(おわり)

$\boxed{5}$ **確認：2 以上の任意の整数は，有限個の素数の積に(順序を除いて)一意に分解できる**。最小の合成数 4 については $4 = 2 \times 2$ となって成り立つから，このような性質を満たさない合成数があるとすれば，その最小数 a が存在する。a は 2 以上の整数 b, c を用いて $a = bc$ と表されるが，a の最小性より b, c はそれぞれ有限個の素数の積で表されるから，a もそのようになり矛盾する。素因数分解が 2 通りに

$$p_1{}^{e_1} p_2{}^{e_2} \cdots p_r{}^{e_r} = q_1{}^{f_1} q_2{}^{f_2} \cdots q_s{}^{f_s}$$

と表されるとすれば，まず左辺は p_1 で割り切れ，素数の性質から $p_1 = q_1$ としてよい。$\boxed{4}$ (1)で示した性質をくり返し適用すると $e_1 = f_1$ が導かれ，最終的に

$$r = s,\quad e_j = f_j \quad (j = 1,\ 2,\ \cdots,\ r)$$

が得られる。(定理の証明おわり)

正の整数 a, b の素因数分解を

$$a = p_1{}^{e_1} p_2{}^{e_2} \cdots p_r{}^{e_r},\quad b = p_1{}^{f_1} p_2{}^{f_2} \cdots p_r{}^{f_r} \quad (e_i,\ f_j \text{ は 0 以上の整数})$$

とすれば，最大公約数・最小公倍数は

$$gcd(a,\ b) = p_1{}^{\min(e_1,\ f_1)}\, p_2{}^{\min(e_2,\ f_2)} \cdots p_r{}^{\min(e_r,\ f_r)}$$
$$lcm(a,\ b) = p_1{}^{\max(e_1,\ f_1)}\, p_2{}^{\max(e_2,\ f_2)} \cdots p_r{}^{\max(e_r,\ f_r)}$$

となる。

a の正の約数は $p_1{}^{k_1} p_2{}^{k_2} \cdots p_r{}^{k_r}$ $(0 \leqq k_i \leqq e_i)$

と表されるから，a の正の約数の個数は

$$(e_1 + 1)(e_2 + 1) \cdots (e_r + 1)$$

a の正の約数の総和は

$$\prod_{a=1}^{e_1} p_1{}^a \prod_{b=1}^{e_2} p_2{}^b \cdots \prod_{c=1}^{e_r} p_r{}^c$$

である。

解答：

(1)

$$\begin{array}{r|rr} 2 & 168 & 180 \\ \hline 2 & 84 & 90 \\ \hline 3 & 42 & 45 \\ \hline & 14 & 15 \end{array}$$

より

$$\left.\begin{array}{l} gcd(168,\ 180) = 2^2 \times 3 = 12 \\ lcm(168,\ 180) = 12 \times 14 \times 15 = 2520 \end{array}\right\} \text{(答)}$$

(2) $180 = 2^2 \times 3^2 \times 5$ と素因数分解され，180 の正の約数は

$$2^a 3^b 5^c \quad (a = 0,\ 1,\ 2\ ;\ b = 0,\ 1,\ 2\ ;\ c = 0,\ 1)$$

と表されるから，180 の正の約数の個数は

$$(2+1) \times (2+1) \times (1+1) = 18 \text{ 個} \quad \text{(答)}$$

180 の正の約数の総和は

$$(1 + 2 + 2^2)(1 + 3 + 3^2)(1 + 5) = 7 \times 13 \times 6 = 546 \quad \text{(答)}$$

(3) n の素因数分解を

$$n = {p_1}^{e_1}{p_2}^{e_2}\cdots{p_r}^{e_r}$$

とすると，n の正の約数の個数 N は

$$N = (e_1+1)(e_2+1)\cdots(e_r+1)$$

であるから，

$$\begin{aligned} N\text{が奇数} &\iff e_1+1,\ e_2+1,\ \cdots,\ e_r+1\ \text{がすべて奇数} \\ &\iff e_1,\ e_2,\ \cdots,\ e_r\ \text{がすべて偶数} \\ &\iff e_k = 2f_k\ (k=1,\ 2,\ \cdots,\ r)\ \text{を満たす自然数}\ f_k\ \text{がある} \\ &\iff n = ({p_1}^{f_1}{p_2}^{f_2}\cdots{p_r}^{f_r})^2\ \text{と表される} \\ &\iff n\ \text{は平方数} \end{aligned}$$

（おわり）

(4) $0 < a < a+r,\ p < q$ であり，p と q は素数であるから，

$$(a,\ a+r) = (1,\ p^2q^2),\ (p,\ pq^2),\ (q,\ p^2q),\ (p^2,\ q^2)$$

の 4 つの場合に限られる。

(i) $a=1,\ a+r=p^2q^2$ のとき

$$r = p^2q^2-1 = (pq+1)(pq-1)$$

r は素数であるから

$$pq+1=r,\quad pq-1=1$$

となるが，$p,\ q$ は素数であるから $pq=2$ は成り立たない。

(ii) $a=p,\ a+r=pq^2$ のとき

$$r = pq^2-p = p(q+1)(q-1)$$

p は素数で，$p<q$ であるから

$$2 \leqq p \leqq q-1 < q+1$$

となって，r は合成数となるから不適である。

(iii) $a=q,\ a+r=q^2q$ のとき

$$r = p^2q-q = q(p+1)(p-1)$$

$p,\ q$ は $p<q$ なる素数であるから

$$q \geqq 3,\quad p+1 \geqq 3,\quad p-1 \geqq 1$$

となって，r は合成数となるから不適である。

(iv) $a=p^2,\ a+r=q^2$ のとき

$$r = q^2-p^2 = (q+p)(q-p)$$

r は素数で，$0<q-p<q+p$ であるから，

$$q+p=r,\quad q-p=1$$

$p,\ q$ は素数であるから $p=2,\ q=3$ と定まり，$r=5,\ a=4$ が得られる。

以上より，求める整数の組は

$$(a,\ p,\ q,\ r) = (4,\ 2,\ 3,\ 5)\quad \text{(答)}$$

$\boxed{6}$ **確認**：整数は数直線上で一定の間隔 1 を保って分布しているので，条件を満たす範囲を大雑把に評価するだけで，答の候補を絞り込むことができる。

(1) 2 次不等式の解の範囲で整数を拾えばよいのだが，境界値が無理数の場合はその無理数を隣り合う整数で評価するのが基本である。ただ，整数係数の整式の場合はグラフ(関数の増減)を考えた方が簡単である。

(2) $\dfrac{6x+1}{9x^2+2}=n$ とでもおいて，実数 x の存在条件(実数解条件)を考える。

(3) 不等式を満たす整数 x は限られるので，「ただ 1 つの解」が具体的に決まる。

(4) まず整数係数の連立不等式に直し，

$$\text{正の整数} \iff 1\text{以上の整数}$$

と言い換えて処理する。意外な盲点であるが，不等式自体は実数の範囲で考えているため，これだけのことで評価が厳しくなっているのである。

(5) 隣り合う立方数(3 乗数)で評価することを考える。

解答：

(1)〔解法 1〕公式を用いて 2 次不等式 $x^2-7x-4<0$ を解くと

$$\frac{7-\sqrt{65}}{2}<x<\frac{7+\sqrt{65}}{2}$$

ここで，$8^2<65<9^2$ より $8<\sqrt{65}<9$ であるから，境界値の範囲は

$$\frac{7-9}{2}<\frac{7-\sqrt{65}}{2}<\frac{7-8}{2},\quad \frac{7+8}{2}<\frac{7+\sqrt{65}}{2}<\frac{7+9}{2}$$

となり，x を整数の範囲に限定すると

$$0\leqq x\leqq 7 \qquad \therefore\ x=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7 \quad \text{(答)}$$

〔解法 2〕$f(x)=x^2-7x-4$ とおくと，($f(0)=-4$，$f(7-x)=f(x)$ に注目して)

$$f(-1)=4>0,\quad f(0)=-4<0,\quad f(7)=-4<0,\quad f(8)=4>0$$

より，求める整数解は

$$x=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7 \quad \text{(答)}$$

(2) $\dfrac{6x+1}{9x^2+2}=n$ とおくと，

$$9nx^2-6x+(2n-1)=0$$

$n=0$ のとき，$x=-\dfrac{1}{6}$

$n\neq 0$ のとき，x の 2 次方程式が実数解をもつことより

$$\tfrac{1}{4}(\text{判別式})=3^2-9n(2n-1)\geqq 0$$

$$9(2n^2-n-1)=9(2n+1)(n-1)\leqq 0$$

n は 0 でない整数であるから $n=1$ となり，このとき

$$9x^2-6x+1=(3x-1)^2=0 \qquad \therefore\ x=\frac{1}{3}$$

以上より，求める x の値は

$$x = -\frac{1}{6},\ \frac{1}{3} \quad \text{(答)}$$

(3) $\begin{cases} x^2 - ax < 0 & \cdots\cdots ① \\ 2x^2 - 3x - 9 < 0 & \cdots\cdots ② \end{cases}$

①($\Leftrightarrow x(x-a) < 0$)を解くと，

$a < 0$ のとき $a < x < 0$，$a = 0$ のとき解なし，$a > 0$ のとき $0 < x < a$

となるから，

ただ 1 つの整数解は -1 または 1

に限られる。②($\Leftrightarrow (2x+3)(x-3) < 0$)を解くと，

$$-\frac{3}{2} < x < 3$$

であるから，①かつ②を満たす整数 x が -1 だけとなるのは

$$a < -1$$

のときであり，①かつ②を満たす整数 x が 1 だけとなるのは

$$1 < a \leqq 2$$

のときである。以上より，求める範囲は

$$a < -1 \text{ または } 1 < a \leqq 2 \quad \text{(答)}$$

(4) 正の整数は 1 以上の整数と同じであることに注意すると

$$\frac{2}{3} < \frac{m}{n} \iff 3m - 2n > 0 \iff 3m - 2n \geqq 1 \iff m \geqq \frac{2n+1}{3}$$

$$\frac{m}{n} < \frac{3}{4} \iff 3n - 4m > 0 \iff 3n - 4m \geqq 1 \iff m \leqq \frac{3n-1}{4}$$

であるから，実数 m が存在するための条件は

$$\frac{2n+1}{3} \leqq \frac{3n-1}{4}$$

$$4(2n+1) \leqq 3(3n-1) \qquad \therefore\ n \geqq 7$$

$n = 7$ のとき

$$\frac{2 \times 7 + 1}{3} \leqq m \leqq \frac{3 \times 7 - 1}{4} \qquad \therefore\ m = 5$$

よって，求める有理数は

$$\frac{m}{n} = \frac{5}{7} \quad \text{(答)}$$

(5) $m > 0$ より

$$m^3 < m^3 + 3m^2 + 2m + 6 < m^3 + 6m^2 + 12m + 8 = (m+2)^2$$

であるから，$m^3 + 3m^2 + 2m + 6$ が立方数とすれば

$$m^3 + 3m^2 + 2m + 6 = (m+1)^3$$

$$2m + 6 = 3m + 1 \qquad \therefore\ m = 5 \quad \text{(答)}$$

$\boxed{7}$ **確認**：$a,\ b$ が互いに素な整数 $(ab \neq 0)$ であるとき

$$ax = by \iff x = bn,\ y = an \ (n \text{ は整数})$$

が成り立つことが，1 次不定方程式の解法の基本となる。

定数項が 0 でないときは，解 $(x_0,\ y_0)$ を 1 組見つけて差をとると

$$\begin{array}{rr} & ax \ \ - by \ \ + c = 0 \\ -) & ax_0 - by_0 + c = 0 \\ \hline & a(x - x_0) - b(y - y_0) = 0 \end{array}$$

のように，$aX = bY$ の形に帰着できる。$\left(\to (2)\right)$ 整数解 $(x_0,\ y_0)$ が見つけにくいときは，ユークリッドの互除法$\left(\to \boxed{9}\right)$を用いる。$a$ と b が互いに素でないときは，両辺を $gcd(a,\ b)$ で割る。必然的に

$$ax + by + c = 0 \text{ を満たす整数 } x,\ y \text{ が存在 } \iff gcd(a,\ b) \big| c$$

ということになる。$\left(\to \boxed{10}\right)$

解答：

(1) 両辺を $gcd(24,\ 18) = 6$ で割って

$$24x = 18y \iff 4x = 3y$$

$4x$ は 3 の倍数であるが，4 と 3 は互いに素であるから，

$$x = 3n \quad (n \text{ は整数})$$

と表され，$4 \cdot 3n = 3y$ より y も求めて

$$x = 3n,\ y = 4n \quad (n \text{ は整数}) \quad \text{(答)}$$

(2) $x,\ y$ が整数のとき $2x + 4y$ は偶数で，右辺 1 は奇数であるから，

$$2x + 4y = 1 \text{ は整数解をもたない} \quad \text{(答)}$$

(3) $3 \times 9 - 5 \times 4 = 7$ であるから，$3x - 5y = 7$ の両辺からひいて

$$\begin{aligned} 3x - 5y = 7 &\iff 3(x - 9) - 5(y - 4) = 0 \\ &\iff 3(x - 9) = 5(y - 4) \end{aligned}$$

3 と 5 は互いに素であるから，

$$x - 9 = 5n, \quad y - 4 = 3n$$

$$\therefore \quad x = 5n + 9, \quad y = 3n + 4 \ (n \text{ は整数}) \quad \text{(答)}$$

$\boxed{8}$ **確認**：(多変数)2 次方程式の 2 次の項全体の部分を**主要部**というが，主要部については(必要ならば適当に両辺を整数倍すると)整数係数多項式として

(i) 既約多項式　(ii) 相異なる 1 次式の積　(iii) 完全平方式の整数倍

のいずれかとなる。不定方程式の整数解を求めるには，各型に応じて

(i) 主要部が因数分解できないときは，(必要条件として)実数の存在条件(平方または判別式が 0 以上)から範囲を絞り込む

(ii) 主要部が相異なる 1 次式の積にできるときは，式全体を“$(\quad)\times(\quad)=$ 定数”の形にして約数を考える

(iii) 主要部が平方式の定数倍のときは，平方因数に注目する

というのが基本である。2 次曲線論の知識を借りれば，

(i)は楕円の方程式であり，存在範囲が有界であることを活用

(ii)は双曲線または 2 直線の方程式であり，方程式の特徴を活用

(iii)は放物線の方程式であり，1 次式と平方のギャップを活用

ということになり，極めて自然な発想だと言える。ただし，放物線の方程式にあたる(iii)の型の場合，不定方程式の整数解は定まらないので，本問では取り上げない。(ii)の型の場合，本問(3), (4)のような変形自体が解法の決め手となるので，変形方法をしっかりと覚えてほしい。

解答：

(1) $y^2=21-5x^2\geqq 0$ より

$$x^2\leqq\frac{21}{5}=4+\frac{1}{5}$$

x は正の整数であるから，

$$x=1 \text{ または } x=2$$

$x=1$ のときは $y^2=16$ であり，y も正の整数であるから $y=4$

$x=2$ のときは $y^2=1$ であり，y は正の整数であるから $y=1$

以上より，求める正の整数の組は

$$(x,\ y)=(1,\ 4),\ (2,\ 1)\quad (\text{答})$$

(2) 与えられた方程式を y について整理して

$$y^2-2(x+1)y+2x^2+x=0$$

必要条件として実数 y が存在することより

$$\frac{1}{4}(\text{判別式})=(x+1)^2-(2x^2+x)=-x^2+x+1\geqq 0$$

$f(x)=-x^2+x+1$ とおくと

$$f(-1)=-1<0,\ f(0)=1>0,\ f(1)=1>0,\ f(2)=-1<0$$

であるから，x が整数であることより

$$x=0 \text{ または } x=1$$

$x=0$ のときは

$$y^2-2y=y(y-2)=0\qquad\therefore\ y=0,\ 2$$

$x=1$ のときは

$$y^2-4y+3=(y-1)(y-3)=0 \qquad \therefore\ y=1,\ 3$$

よって，求める整数解は

$$(x,\ y)=(0,\ 0),\ (0,\ 2),\ (1,\ 1),\ (1,\ 3) \quad \text{(答)}$$

(3) 与えられた方程式を変形して

$$m(n-2)+4n-20=0$$
$$m(n-2)+4(n-2)-12=0$$
$$\therefore\ (m+4)(n-2)=12$$

$m \geqq 1,\ n \geqq 1$ より $m+4 \geqq 5,\ n-2 \geqq -1$ であるから，

$$(m+4,\ n-2)=(6,\ 2),\ (12,\ 1)$$
$$\therefore\ (m,\ n)=(2,\ 4),\ (8,\ 3) \quad \text{(答)}$$

(4) $a^2+7ab+12b^2=(a+3b)(a+4b)$ に注目して

$$a^2+7ab+12b^2+a+3b-9=(a+3b+c)(a+4b+d)+k$$

とおくと，1 次以下の項の係数比較より

$$c+d=1,\quad 4c+3d=3,\quad cd+k=-9$$
$$\therefore\ c=0,\ d=1,\ k=-9$$

よって，与えられた方程式は

$$(a+3b)(a+4b+1)=9$$

9 の約数を考えて

$$(a+3b,\ a+4b+1)=(1,\ 9),\ (3,\ 3),\ (9,\ 1),\ (-1,\ -9),\ (-3,\ -3),\ (-9,\ -1)$$
$$\therefore\ (a,\ b)=(-20,\ 7),\ (6,\ -1),\ (36,\ -9),\ (26,\ -9),\ (0,\ -1),\ (-30,\ 7) \quad \text{(答)}$$

(5) $\sqrt{n^2+n-1}=m\,(\geqq 0)$ とおくと，

$$n^2+n-1=\left(n+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{5}{4}=m^2$$
$$(2n+1)^2-(2m)^2=5$$
$$\therefore\ (2n+2m+1)(2n-2m+1)=5$$

$m \geqq 0$ より $2n+2m+1 \geqq 2n-2m+1$ であるから，

$$(2n+2m+1,\ 2n-2m+1)=(5,\ 1),\ (-1,\ -5)$$
$$\therefore\ (n,\ m)=(1,\ 1),\ (-2,\ 1)$$

よって，$\sqrt{n^2+n-1}$ が整数となるような整数 n は

$$n=1,\ -2 \quad \text{(答)}$$

$\boxed{9}$ **確認**：自然数 b で割れるか割れないかを議論するには，整数 q, r を用いて $bq+r$ $(0 \leqq r < b)$ の形に持ち込めばよい($\rightarrow \boxed{1}$, $\boxed{2}$)が，変形のしようがないときには

N を b で割った余りで場合分けする

のが有効な手段である。

余りの個数が限られていることに注目すると，a, m が 2 以上の整数のとき

a^n (n は自然数)を m で割った余りは周期をもつ

ことがわかる。a, a^2, a^3, $\cdots$ が異なる余りをとり続けるのは無理だからである。実際に解く場面では，(3)のように，実験して $a^n = (m$ の倍数$)+1$ となる n を見つけるのがポイントとなる。(10 進法表示における) 1 の位や下何桁かについても，余りとみることができる。周期性の考察のほか，二項定理の活用もポイントとなる。

2 整数 a, b について，$a-b$ が自然数 m で割り切れるとき，記号で

$$a \equiv b \pmod{m}$$

と表し，a と b は **m を法として合同**であるという。$a_1 \equiv a_2$, $b_1 \equiv b_2 \pmod{m}$ のとき

$$a_1+b_1 \equiv a_2+b_2,\quad a_1-b_1 \equiv a_2-b_2,\quad a_1b_1 \equiv a_2b_2 \pmod{m}$$

が成り立ち，演算が矛盾なく定義できる。(各自で確かめよ。)
大きな数の余りを扱うときに，この合同類を考えると便利である。

解答：

(1) $n = 5q + r$ (q, r は整数，$0 \leqq r \leqq 4$) と表すことができて

$$n^2+n+1 = (5q+r)^2+(5q+r)+1 = 5(5q^2+2qr+q)+r^2+r+1$$

であるから，r^2+r+1 が 5 で割れ切れないことを示せばよい。

$r=0$ のとき $r^2+r+1=1$
$r=1$ のとき $r^2+r+1=3$
$r=2$ のとき $r^2+r+1=7=5+2$
$r=3$ のとき $r^2+r+1=13=5\times 2+3$
$r=4$ のとき $r^2+r+1=21=5\times 4+1$

となるから，n^2+n+1 は 5 で割り切れない。 (おわり)

(2) 3 で割った余りに注目すれば，任意の整数 n は

$3m-1$, $3m$, $3m+1$ (m は整数)

のいずれかの形に表される。

$$\begin{aligned} f(3m-1) &= a(3m-1)^3+b(3m-1)^2+c(3m-1)+d \\ &= (3\text{ の倍数}) + a(-1)^3+b(-1)^2+c(-1)+d \\ &= (3\text{ の倍数}) + f(-1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(3m) &= a(3m)^3+b(3m)^2+c(3m)+d \\ &= 3(9am^3+3bm^2+cm)+d \\ &= (3\text{ の倍数}) + f(0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(3m+1) &= a(3m+1)^3+b(3m+1)^2+c(3m+1)+d \\ &= (3\text{ の倍数}) + a\cdot 1^3+b\cdot 1^2+c\cdot 1+d \end{aligned}$$

$= (3\text{ の倍数}) + f(1)$

であるから，$f(-1)$，$f(0)$，$f(1)$ がいずれも 3 で割り切れないならば，任意の整数 n に対して $f(n)$ は 3 で割り切れない，特に $f(n) \neq 0$ である。 (おわり)

(3) $3^2 = 9$，$3^3 = 27 = 11 \times 2 + 5$，$3^4 = 81 = 11 \times 7 + 4$，$3^5 = 243 = 11 \times 22 + 1$ に注目すると，

$$3^{n+5} - 3^n = 3^n(243 - 1) = 11 \times 3^n \times 22$$

より，3^n を 11 で割った余りは n について 5 を周期とする。

$$2003 = 5 \times 400 + 3$$

より，3^{2003} を 11 で割った余りは，3^3 を 11 で割った余りと等しくなるから，

3^{2003} を 11 で割った余りは 5 (答)

(4)
$$\begin{aligned}
3^{2003} &= 3 \times (3^2)^{1001} \\
&= 3 \times (10 - 1)^{1001} \\
&= 3 \times (-1 + 1001 \cdot 10 - {}_{1001}\mathrm{C}_2 \cdot 10^2 + {}_{1001}\mathrm{C}_3 \cdot 10^3 - {}_{1001}\mathrm{C}_4 \cdot 10^4) \\
&\qquad + (10^5\text{ の倍数}) \\
&= 3 \times (-1 + 1001 \cdot 10 - 1001 \cdot 500 \cdot 10^2 + 1001 \cdot 500 \cdot 333 \cdot 10^3 \\
&\qquad - 1001 \cdot 250 \cdot 333 \cdot 499 \cdot 10^4) + (10^5\text{ の倍数}) \\
&= 3 \times (-1 + 10010 - 50000 + 10^5) + (10^5\text{ の倍数}) \\
&= 3 \times 60009 + (10^5\text{ の倍数}) \\
&= 180027 + (10^5\text{ の倍数})
\end{aligned}$$

であるから，

3^{2003} の下 5 桁は 80027 (答)

(5) $2000 = 7 \times 285 + 5$ より

$$\begin{aligned}
&2000 \equiv 5 \pmod 7, \quad a_1 = 5 \\
&2000^2 \equiv 5^2 \equiv 25 \equiv 4 \pmod 7, \quad a_2 = 4 \\
&2000^3 \equiv 4 \times 5 \equiv 20 \equiv 6 \pmod 7, \quad a_3 = 6 \\
&2000^4 \equiv 6 \times 5 \equiv 30 \equiv 2 \pmod 7, \quad a_4 = 2 \\
&2000^5 \equiv 2 \times 5 \equiv 10 \equiv 3 \pmod 7, \quad a_5 = 3 \\
&2000^6 \equiv 3 \times 5 \equiv 15 \equiv 1 \pmod 7, \quad a_6 = 1
\end{aligned}$$

以下，7 で割った余りは 5，4，6，2，3，1 をくり返す。

$$\begin{aligned}
S_2 &= 5 + 4 = 9 \\
S_3 &= 9 + 6 = 15 \\
S_4 &= 15 + 2 = 17 \\
S_5 &= 17 + 3 = 20 \\
S_6 &= 20 + 1 = 21
\end{aligned}$$

であるから，

S_n が 7 で割り切れる最小の n は 6 (答)

$\boxed{10}$ **確認**：$\boxed{9}$ において「余りで場合分けする」手法を確認したが，場合分けを尽くすことで逆の命題の成立を導くことができる。このような論法を**転換法**という。

本問(1)では a^2+b^2 が 3 の倍数だからといって a^2+b^2 を変形しようがないので，a^2+b^2 を 3 で割ったときに起こり得るすべての余りを調べることで，a^2+b^2 が 3 の倍数となる場合を特定する。

本問(2)も転換法で証明できるが，a と b がともに奇数となる場合が起こらないことさえ示せばよいので，a と b がともに奇数と仮定して矛盾を導く方が手っ取り早い。このような論法を**背理法**という。

(2)では，a と b を偶数・奇数で(2 で割った余りで)場合分けするだけでは，うまく証明できない。**平方数の偶奇を扱うときは，4 または 8 で割った余りで場合分けする**のが基本である。それは $\boxed{1}$ (3)の結果に基づいている。

解答：

(1) m を整数として

$$(3m)^2=3(3m^2),\quad (3m\pm1)^2=3(3m^2\pm2m)+1$$

と表されるから，整数 n について

$$n \text{ は } 3 \text{ の倍数} \iff n^2 \text{ は } 3 \text{ の倍数}$$

$$n \text{ は } 3 \text{ で割り切れない} \iff n^2 \text{ は } 3 \text{ で割ると } 1 \text{ 余る}$$

が成り立つ。

3 で割った余りについて，起こり得るすべての場合を調べると

a^2	0	0	1	1
b^2	0	1	0	1
a^2+b^2	0	1	1	2

よって，a^2+b^2 が 3 の倍数となるのは，$a,\ b$ がともに 3 の倍数のときに限られる。

(おわり)

(2) $a,\ b$ がともに奇数とすると，

$$a=2m-1,\quad b=2n-1 \quad (m,\ n \text{ は自然数})$$

と表されるから，

$$a^2+b^2=4(m^2-m+n^2-n)+2$$

ところが，$a,\ b$ がともに奇数ならば c は偶数となり，c^2 は 4 の倍数となるから，

$$c^2\neq4(m^2-m+n^2-n)+2$$

となり，仮定 $a^2+b^2=c^2$ に反してしまう。

よって，$a^2+b^2=c^2$ を満たすとき，$a,\ b$ の少なくとも一方は偶数である。

(おわり)

$\boxed{11}$ **確認**：本問(1)で示すように，整数 $a,\ b,\ q,\ r\ (ab \neq 0)$ に対して

$$a = bq + r \Longrightarrow gcd(a,\ b) = gcd(b,\ r)$$

が成り立つ。$0 \leqq r < |b|$ とできるので，この操作を何回か繰り返せば a と b の最大公約数を求めることができる。このような方法を**ユークリッドの互除法**という。なお，(1)自体は $0 \leqq r < |b|$ でなくても成り立つ。(1)の証明は $\boxed{3}$ (2)を用いる。

1 次不定方程式は既に $\boxed{7}$ で扱ったが，本問(2)のように係数の数値が大きいとすぐには解が見つけられないので，ユークリッドの互除法を用いることにする。

整数の場合により小さい数に帰着されるのと同様にして，整式(多項式)にユークリッドの互除法を適用すると，より低い次数の式(が表す数)の議論に帰着できる。

解答：

(1) $d = gcd(a,\ b)$，$\delta = gcd(b,\ r)$ とおく。

$a = bq + r$ より a は δ の倍数であるから，δ は a と b の公約数である。よって，

$$\delta \,\big|\, d = gcd(a,\ b)$$

また，$r = a - bq$ より r は d の倍数であるから，d は b と r の公約数である。よって，

$$d \,\big|\, \delta = gcd(b,\ r)$$

$d > 0,\ \delta > 0$ であるから，互いに約数であることより

$$d = \delta$$

(おわり)

(2)

$$\begin{array}{lcl} 2003 = 15 \times 133 + 8 & \longrightarrow & 2003 - 15 \times 133 = 8 \\ 15 = 8 + 7 & \longrightarrow & 15 - 8 = 7 \\ 8 = 7 + 1 & \longrightarrow & 8 - 7 = 1 \end{array}$$

であるから，最後の式から順に代入していくと

$$8 - (15 - 8) = 1 \qquad \therefore\ 8 \times 2 - 15 = 1$$

$$(2003 - 15 \times 133) \times 2 - 15 = 1$$

$$\therefore\ 2003 \times 2 - 15 \times 267 = 1$$

$2003x + 15y = 1$ の両辺からひいて

$$2003(x - 2) + 15(y + 267) = 0$$

2003 と 15 は互いに素であるから，

$$x - 2 = 15n,\quad y + 267 = -2003n \quad (n \text{ は整数})$$

$$\therefore\ x = 15n + 2,\quad y = -2003n - 267 \quad (n \text{ は整数}) \quad (\text{答})$$

(3) $2n + 1$ は奇数であることに注意して

$$4(n^2 + 2) = 4n^2 - 1 + 9 = (2n + 1)(2n - 1) + 9$$

にユークリッドの互除法を適用すると，

$$gcd(n^2 + 2,\ 2n + 1) = gcd(4(n^2 + 2),\ 2n + 1) = gcd(2n + 1,\ 9)$$

$n \geqq 1$ より $2n + 1 \geqq 3$ であることに注意して

$$\begin{aligned} n^2 + 2 \text{ が } 2n + 1 \text{ の倍数} &\Longleftrightarrow gcd(n^2 + 2,\ 2n + 1) = gcd(2n + 1,\ 9) = 2n + 1 \\ &\Longleftrightarrow 2n + 1 \text{ は } 9 \text{ の約数} \\ &\Longleftrightarrow 2n + 1 = 3 \text{ または } 9 \Longleftrightarrow n = 1,\ 4 \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

$\boxed{12}$ **確認**：1 次不定方程式の解の存在の根拠や格子点の考察の基礎となる基本定理：

$a,\ b$ を互いに素な整数とするとき，

$ax+by=1$ を満たす整数 $x,\ y$ が存在する

の証明を考える。ユークリッドの互除法を用いて，$\boxed{11}$(2)を一般化すれば証明できそうであるが，定理の証明だけであれば，もっと見通しの良い方法がある。

（方針 1）$1-a,\ 1-2a,\ \cdots,\ 1-ba$ を b で割った余りが相異なることを導く。

（方針 2）集合 $\{ax+by\,|\,x,\ y\ は整数\}$ が $gcd(a,\ b)$ の倍数の集合であることを示す。

定理の証明する論法もまた，重要な考え方として習得しておきたい。

解答：

(証明 1）$1-a,\ 1-2a,\ \cdots,\ 1-ba$ について，任意の 2 数の差

$$(1-ja)-(1-ka)=a(k-j)\quad (1 \leqq j < k \leqq b)$$

を考えると，$0<k-j<b$ であり，a と b は互いに素であるから，

$a(k-j)$ は b で割り切れない

すなわち，

$1-a,\ 1-2a,\ \cdots,\ 1-ba$ を b で割った余りは相異なる。

これらは b 個あるから，このうち 1 つは b で割り切れ，それを $1-ax$ とすると

$$by=1-ax$$

と満たす整数 $x,\ y$ が存在する。　　（おわり）

(証明 2）$S=\{ax+by\,|\,x,\ y\ は整数\}$ とおく。

$ax+by,\ au+bv \in S,\ n$ を整数とすると

$$(ax+by)\pm(au+bv)=a(x\pm u)+b(y\pm v)\in S$$

$$n(ax+by)=a(nx)+b(ny)\in S$$

が成り立つことに注意する。

S に属する正の整数で最小のものを d とすると，任意の $s\in S$ に対して，

$$s=dq+r,\quad 0\leqq r<d$$

を満たす整数 $q,\ r$ が存在する。$(\to \boxed{2})$

上の注意より $dq\in S,\ r=s-dq\in S$ であるから，d の最小性より

$$s=dq \qquad \therefore\ S=\{dz\,|\,z\ は整数\}$$

$a=a\cdot1+b\cdot0\in S,\ b=a\cdot0+b\cdot1\in S$ より

$$a=dm,\quad b=dn\quad (m,\ n\ は整数)$$

と表される。d は a と b の正の公約数であり，a と b は互いに素であるから，

$$d=1$$

特に，S は整数全体の集合となり，$ax+by=1$ を満たす整数 $x,\ y$ が存在する。

（おわり）

(注）一般に，$\{ax+by\,|\,x,\ y\ は整数\}=\{gcd(a,\ b)\cdot z\,|\,z\ は整数\}$ が成り立つ。

$\boxed{13}$ **確認**：対称式で表された条件では，1つの大小関係の場合だけを調べたあとに，変数を入れ替えてすべてを求めるのが定石である。そのとき，**自分で定めた大小関係が範囲の限定をもたらす**ことが整数問題の手法として重要である。俗に，「見えない束縛条件」と呼ばれているものである。大小を設定して評価式を見出したあとは，$\boxed{6}$と同様に候補を絞って，1つ1つ吟味していくことになる。

解答：

(1) $0 < a \leqq b \leqq c \leqq d$とすると

$$abcd = a + b + c + d \leqq d + d + d + d = 4d \qquad \therefore\ abc \leqq 4$$

$0 < a \leqq b \leqq c$に注意して拾い上げると

$$(a,\ b,\ c) = (1,\ 1,\ 1),\ (1,\ 1,\ 2)\ (1,\ 1,\ 3),\ (1,\ 1,\ 4),\ (1,\ 2,\ 2)$$

$abcd = a + b + c + d$より整数$d\,(\geqq c)$を求めると

$(a,\ b,\ c) = (1,\ 1,\ 1)$のとき，$d = 3 + d$となって不適

$(a,\ b,\ c) = (1,\ 1,\ 2)$のとき，$2d = 4 + d \qquad \therefore\ d = 4$

$(a,\ b,\ c) = (1,\ 1,\ 3)$のとき，$3d = 5 + d \qquad \therefore\ d = \dfrac{5}{2}$ (不適)

$(a,\ b,\ c) = (1,\ 1,\ 4)$のとき，$4d = 6 + d \qquad \therefore\ d = 2$ ($c \leqq d$に反する)

$(a,\ b,\ c) = (1,\ 2,\ 2)$のとき，$4d = 5 + d \qquad \therefore\ d = \dfrac{5}{3}$ (不適)

$a,\ b,\ c,\ d$を入れかえたものも考えて，求める正の整数の組は

$$\begin{aligned}(a,\ b,\ c,\ d) = {} & (1,\ 1,\ 2,\ 4),\ (1,\ 1,\ 4,\ 2),\ (1,\ 2,\ 1,\ 4),\ (1,\ 4,\ 1,\ 2)\\ & (1,\ 2,\ 4,\ 1),\ (1,\ 4,\ 2,\ 1),\ (2,\ 1,\ 1,\ 4),\ (4,\ 1,\ 1,\ 2)\\ & (2,\ 1,\ 4,\ 1),\ (4,\ 1,\ 2,\ 1),\ (2,\ 4,\ 1,\ 1),\ (4,\ 2,\ 1,\ 1) \quad (\text{答})\end{aligned}$$

(2) 対称性より，$2 \leqq a < b < c$として一般性を失わない。このとき

$$1 < \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} < \frac{1}{a} + \frac{1}{a} + \frac{1}{a} = \frac{3}{a} \qquad \therefore\ 2 \leqq a < 3$$

aは自然数であるから

$$a = 2$$

$a = 2$を代入して，bについても同様に考えて

$$\frac{1}{2} < \frac{1}{b} + \frac{1}{c} < \frac{1}{b} + \frac{1}{b} = \frac{2}{b} \qquad \therefore\ a = 2 < b < 4$$

$a = 2,\ b = 3$であるから

$$\frac{1}{c} > 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \qquad \therefore\ c = 4 \text{ または } 5$$

よって，$2 \leqq a < b < c$のとき$(a,\ b,\ c) = (2,\ 3,\ 4)$または$(2,\ 3,\ 5)$に定まり，

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{6 + 4 + 3}{12} = \frac{13}{12},\quad \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} = \frac{15 + 10 + 6}{30} = \frac{31}{30}$$

より，

求める値は$\dfrac{13}{12},\ \dfrac{31}{30}$ (答)

$\boxed{14}$ **確認**：座標平面や座標空間において，座標成分がすべて整数である点を**格子点**という。格子点を(整数論的に)論じる上で基本となるのは

1°　2 つの格子点 $(0,\ 0)$, $(a,\ b)$ を結ぶ線分上は，両端を除いて $gcd(a,\ b)-1$ 個の格子点がある

2°　格子点を頂点とし，格子点を内部にもたない平行四辺形の面積は 1

という 2 つの性質である。

$gcd(a,\ b)=d$ とおくと，$a=dm,\ b=dn$ を満たす互いに素な整数 $m,\ n$ が存在し，

$$(0,\ 0),\ (m,\ n),\ (2m,\ 2n),\ \cdots,\ (dm,\ dn) \text{ は線分上の格子点}$$

となるが，(1)の結果よりこの間には他に格子点はないので 1° が成り立つ。

2° は本問(3)で証明するが，このような平行四辺形によって座標平面上のすべての格子点が尽くされることがポイントである。

なお，ただ単に格子点の個数を数える問題は数列の問題なので，本ファイルでは扱わないことにする。

解答：

(1)　$a=0$ のときは $b=\pm 1$ であるから，題意は成立する。$a<0$ のときは $a,\ b$ をそれぞれ $-a,\ -b$ に置き換えて議論すればよいので，

$$a>0 \text{ のときを示せば十分}$$

である。線分 OA は

$$y=\frac{b}{a}x,\quad 0 \leqq x \leqq a$$

と表されるが，a と b は互いに素であるから

$$\frac{b}{a},\ \frac{2b}{a},\ \cdots,\ \frac{(a-1)b}{a} \text{ はすべて整数でない。}$$

よって，線分 OA 上には両端を除いて格子点は存在しない。　(おわり)

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(a,\ b)$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(c,\ d)$ とおくと，仮定より

$$(\text{辺 AB 上の格子点の個数})=gcd(a,\ b)-1,$$
$$(\text{辺 BC 上の格子点の個数})=gcd(c,\ d)-1$$

はともに奇数であるから，$gcd(a,\ b)$, $gcd(c,\ d)$ はともに偶数であり，

$$a,\ b,\ c,\ d \text{ は偶数}$$

である。

$$\overrightarrow{\mathrm{BC}}=(c-a,\ d-b)$$

について，$c-a$ も $d-b$ も偶数であるから

$$gcd(c-a,\ d-b) \text{ は偶数}$$

であり，

$$(\text{辺 BC 上の格子点の個数})=gcd(c-a,\ d-b)-1 \text{ は奇数}$$

である。　(おわり)

(3) 適当に平行移動して，平行四辺形の 4 頂点を

$$\mathrm{O}(0,\ 0),\ \mathrm{A}(a,\ c),\ \mathrm{B}(a+b,\ c+d),\ \mathrm{C}(b,\ d)$$

としてよい。平行四辺形の内部には格子点がないので，この平行四辺形を座標平面上に敷き詰めることによりすべての格子点を尽くせるから，特に

$$\begin{cases} 1 = am + bn & \cdots\cdots ① \\ 0 = cm + dn & \cdots\cdots ② \end{cases} \qquad \begin{cases} 0 = ap + bq & \cdots\cdots ③ \\ 1 = cp + dq & \cdots\cdots ④ \end{cases}$$

を満たす整数 $m,\ n,\ p,\ q$ が存在する。

$$\begin{aligned} &① \times d - ② \times b : (ad-bc)m = a && \cdots\cdots ⑤ \\ &② \times a - ① \times c : (ad-bc)n = -c && \cdots\cdots ⑥ \\ &③ \times d - ④ \times b : (ad-bc)p = -b && \cdots\cdots ⑦ \\ &④ \times a - ③ \times c : (ad-bc)q = d && \cdots\cdots ⑧ \end{aligned}$$

であるから，⑤ × ⑧ − ⑦ × ⑥ より

$$(ad-bc)^2(mq-np) = ad-bc$$

平行四辺形 OABC の面積 S は

$$S = |ad-bc| \neq 0$$

であるから

$$(ad-bc)(mq-np) = 1$$

$ad-bc,\ mq-np$ はともに整数であるから，

$$ad-bc = \pm 1 \qquad \therefore\ S = |ad-bc| = 1$$

(おわり)

$\boxed{15}$ **確認**：漸化式

$$a_1=2,\ a_2=4,\ a_{n+2}=4a_{n+1}+2a_n\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

は基本的な形なので，一般項は

$$a_n=(2+\sqrt{6}\,)^{n-1}+(2-\sqrt{6}\,)^{n-1}$$

と容易に求められるが，その表示を見ても整数論的性質は何もわからない。そこで，漸化式が整数係数であることを活かし，帰納的に考えて解決しようと試みる。

(2)では，$\boxed{9}$ と同様，余りに周期性があることを見い出す。

解答：

(1) a_n が整数であることを n についての数学的帰納法で示す。

仮定より，$a_1=2,\ a_2=4$ は既に整数である。

$a_k,\ a_{k+1}$ がともに整数であるとすれば，整数は和, 積について閉じているので,

$$a_{k+2}=4a_{k+1}+2a_k$$

より a_{k+2} も整数である。

よって，任意の自然数 n に対して，a_n は整数である。 (おわり)

(2) 数列 $\{a_n\}$ の何項かを求めると,

$$\begin{aligned}
&a_1=2\\
&a_2=4\\
&a_3=4\times4+2\times2=20\equiv0\ (\mathrm{mod}\ 5)\\
&a_4=4\times20+2\times4=88\equiv3\ (\mathrm{mod}\ 5)\\
&a_5=4\times88+2\times20=392\equiv2\ (\mathrm{mod}\ 5)\\
&a_6=4\times392+2\times88=964\equiv4\ (\mathrm{mod}\ 5)\\
&\quad\vdots
\end{aligned}$$

与えられた漸化式より，一般に

$$\begin{aligned}
a_{n+4}-a_n&=(4a_{n+3}+2a_{n+2})-a_n\\
&=4(4a_{n+2}+2a_{n+1})+2a_{n+2}-a_n\\
&=18a_{n+2}+8a_{n+1}-a_n\\
&=18(4a_{n+1}+2a_n)+8a_{n+1}-a_n\\
&=5(16a_{n+1}+7a_n)
\end{aligned}$$

(1) より $a_{n+1},\ a_n$ は整数であるから,

$$a_{n+4}\equiv a_n\ (\mathrm{mod}\ 5)$$

$2004=4\times501$ より

$$a_{2004}\equiv a_4\equiv3\ (\mathrm{mod}\ 5)$$

a_{2004} を 5 で割った余りは 3　(答)

$\boxed{16}$ **確認**：本問では，整数値多項式を考える。解法のポイントは

　　1° 任意の整数 n に対して $f(n+1)-f(n)$ は整数であることを示す

　　2° 階乗関数 $x(x-1)(x-2)\cdots(x-k+1)$ だけで表す

のいずれかの方針をとることである。本問で示したことを一般化すると

　　n 次多項式 $P(n)$ について，$P(0)$，$P(1)$，$\cdots$，$P(n)$ が整数ならば，
　　すべての整数 m に対して $P(m)$ は整数である

ことが成り立つ。逆に，すべての整数 m に対して $P(m)$ が整数となる n 次多項式は

$$P(x)=\sum_{k=0}^{n} a_kQ_k(x)\quad (a_k \text{ は整数，} Q_k(x) \text{ は } k \text{ 次階乗関数})$$

と表される。(k 次階乗関数 $Q_k(x)$ とは $Q_k=x(x-1)(x-2)\cdots(x-k+1)$ $(k \geqq 2)$，$Q_1(x)=x$，$Q_0(x)=1$ のことである。) 意欲のある人は証明に挑戦してみよう。

解答：

(解法 1)　$g(n)=f(n+1)-f(n)=2an+(a+b)$ とおく。

$g(0)=f(1)-f(0)=a+b$，$g(1)=f(2)-f(1)=2a+(a+b)$ はいずれも整数であるから

$$2a,\ a+b \text{ はともに整数}$$

であり，任意の整数 n に対して

$$g(n)=2an+(a+b) \text{ は整数}$$

である。

$$n \geqq 1 \text{ のとき}\quad f(n)=f(0)+\sum_{k=0}^{n} g(k)$$

$$n \leqq -1 \text{ のとき}\quad f(n)=f(0)-\sum_{k=-|n|+1}^{-1} g(k)$$

と表されるから，$f(0)$ とあわせて，$f(n)$ は整数である。　(おわり)

(解法 2)　$f(x)=ax(x-1)+(a+b)x+c$ とみて，

$$f(0)=c,\quad f(1)=(a+b)+c,\quad f(2)=2a+(a+b)+c$$

はそれぞれ整数であるから，

$$c,\ a+b,\ 2a \text{ はすべて整数}$$

である。連続する整数の積は偶数であるから，すべての整数 n に対して

$$f(n)=2a\cdot\frac{1}{2}n(n-1)+(a+b)n+c \text{ は整数}$$

である。　(おわり)

$\boxed{17}$ **確認**：実数 x を

$$x = n + \alpha \quad (n \text{ は整数，} 0 \leqq \alpha < 1)$$

と表すとき，n を x の**整数部分**，α を n の**小数部分**という。x の整数部分は $[x]$ と表され，この記号は**ガウス記号**と呼ばれている。

実際に問題を解く場面では，隣り合う整数で評価し，

$$[x] = n \iff n \leqq x < n + 1$$

と考える。(1)のように平方根で表された数については，根号の中の数を隣り合う平方数で評価すればよい。

有理数 $\dfrac{a}{b}$ (a, b は整数，$b > 0$)については，整数 q, r を用いて

$$a = bq + r, \quad 0 \leqq r < b$$

と表される$\left(\to \boxed{2}\right)$から，

$$\frac{a}{b} = q + \frac{r}{b}, \quad 0 \leqq \frac{r}{b} < 1$$

とみることで，商と余りの問題に帰着される。$\boxed{9}$ で確認したように，2^n は 3 で割った余りについて周期をもつので，(3)のタイプの問題では先に小数部分を求める。

解答：

(1) $11^2 (= 121) < 141 < 12^2 (= 144)$ より

$$11 < \sqrt{141} < 12 \qquad \therefore \ \sqrt{141} \text{ の整数部分は } 11 \quad \text{(答)}$$

(2) $[x] = n$ とおく。

$n \leqq x < n + \dfrac{1}{2}$ のとき

$$n + \frac{1}{2} \leqq x + \frac{1}{2} < n + 1, \quad 2n \leqq 2x < 2n + 1$$

$$\therefore [x] = n, \quad \left[x + \frac{1}{2}\right] = n, \quad [2x] = 2n$$

$n + \dfrac{1}{2} \leqq x < n + 1$ のとき

$$n + 1 \leqq x + \frac{1}{2} < n + \frac{3}{2}, \quad 2n + 1 \leqq 2x < 2n + 2$$

$$\therefore [x] = n, \quad \left[x + \frac{1}{2}\right] = n + 1, \quad [2x] = 2n + 1$$

よって，いずれの場合も

$$[x] + \left[x + \frac{1}{2}\right] = [2x]$$

(おわり)

(3) 2^n を 3 で割った余りを r_n とおくと，

$$2^n = (3-1)^n \equiv (-1)^n \pmod 3$$

であるから，

$$n \text{ が奇数のとき } r_n = 2,\quad n \text{ が偶数のとき } r_n = 1$$

1 つの式にまとめると

$$r_n = \frac{3-(-1)^n}{2}$$

$2^n = 3\left[\dfrac{2^n}{3}\right] + r_n$ であるから，

$$\left[\frac{2^n}{3}\right] = \frac{2^n - r_n}{3} = \frac{2^{n+1}-3+(-1)^n}{6} \quad \text{(答)}$$

$\boxed{18}$ **確認**：通常の数字の表記は，10 ごとに位を繰り上げるので，**10 進法**と呼ばれている。この 10 の部分を一般の(2 以上の整数)p にして，各位を 0，1，2，$\cdots$，$p-1$ のいずれかの数字とし，p ごとに位が上がる表記を $\boldsymbol{p}$ **進法**という。10 進法で 54367 が

$$54321 = 5 \times 10^4 + 4 \times 10^3 + 3 \times 10^2 + 6 \times 10 + 7$$

を意味するのと同様，p 進法で $a_n a_{n-1} \cdots a_1 a_0$ と表される数 a は

$$a = a_n \cdot p^n + a_{n-1} \cdot p^{n-1} + \cdots + a_1 \cdot p + a_0$$

のことである。これを

$$\begin{aligned}
&a = p(a_n \cdot p^{n-1} + a_{n-1} \cdot p^{n-2} + \cdots + a_2 \cdot p + a_1) + a_0 \\
&a_n \cdot p^{n-1} + a_{n-1} \cdot p^{n-2} + \cdots + a_2 \cdot p + a_1 = p(a_n \cdot p^{n-2} + \cdots + a_2) + a_1 \\
&\qquad\vdots
\end{aligned}$$

とみるとわかるように，p で割った余りを次々に求めていくことにより，p 進法表示は得られる。

解答：

(1) 4444 を 3 で割り，その商を次々に 3 で割ると

$$\begin{aligned}
&4444 = 3 \times 1481 + 1 \\
&1481 = 3 \times 493 + 2 \\
&493 = 3 \times 164 + 1 \\
&164 = 3 \times 54 + 2 \\
&54 = 3 \times 18 + 0 \\
&18 = 3 \times 6 + 0 \\
&6 = 3 \times 2 + 0
\end{aligned}$$

となるから，

10 進法で表された 4444 を 3 進法で表すと 20002121　(答)

(2) 3 進法で表された 10121 を 10 進法で表すと

$$\begin{aligned}
1 \times 3^4 + 0 \times 3^3 + 1 \times 3^2 + 2 \times 3 + 1 &= 81 + 0 + 9 + 6 + 1 \\
&= 97 \quad \text{(答)}
\end{aligned}$$