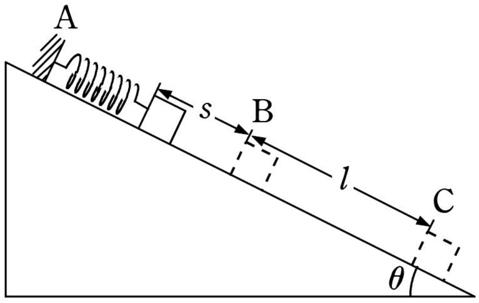
図に示すように，水平面とのなす角度が θ の斜面上で，温度 0℃ の氷と 0℃ の水が，質量が無視できる容器に入っており，ばねに結ばれている。氷と水を加えた質量は m〔kg〕であり，このうち氷の質量は m_i〔kg〕，水の質量は m_w〔kg〕である。ばねの他端は位置 A にある壁に固定されており，このばねの自然の長さは線分 AB である。この容器は，図に示すように，位置 B から s〔m〕縮めて置かれている。このばねのばね定数は k〔N/m〕で，質量は無視できる。容器は，ばねが s〔m〕だけ縮められた状態から運動を開始し，ばねの自然の長さの位置 B でばねと離れ，$(s+l)$〔m〕の C の位置で静止した。容器と斜面との間の動摩擦係数は μ であり，摩擦力による仕事はすべて容器内の氷の融解および水の温度上昇に使われ，氷と水は常に熱平衡にある。また運動中の容器内の氷，または水の動きは無視でき，運動中の容器への空気抵抗も無視できるものとする。重力加速度の大きさを g〔m/s^2〕，氷の融解熱を q〔J/kg〕，水の比熱を c〔J/kg·K〕とするとき，以下の問いに答えよ。



(1) 容器がばねの自然の長さの位置 B に達したときに氷はすべて 0℃ の水になった。このとき，ばねが縮められていた長さ s〔m〕を求めよ。

(2) ばねの自然の長さの位置 B から，容器が静止する位置 C までの斜面上の距離 l〔m〕を求めよ。

(3) 容器が静止したときの水の温度 T〔℃〕を求めよ。ただし，水の温度は沸点に達しないものとする。

解説

(1)　摩擦力に抗してした仕事と，氷が融解に要した熱量が等しいから

$$\mu mgs\cos\theta = m_i q \qquad ゆえに\quad s = \frac{m_i q}{\mu mg\cos\theta}\ [\mathrm{m}]$$

(2)　力学的エネルギーの減少と，摩擦力に抗してした仕事が等しいから

$$\frac{1}{2}ks^2 + mg(s+l)\sin\theta = \mu mg(S+l)\cos\theta$$

$$ゆえに\quad l = \frac{ks^2}{2mg(\mu\cos\theta - \sin\theta)} - s$$

これに(1)の s を代入して整理すると

$$l = \frac{km_i^2q^2}{2\mu^2m^3g^3(\mu\cos\theta - \sin\theta)\cos^2\theta} - \frac{m_i q}{\mu mg\cos\theta}\qquad [\mathrm{m}]$$

(3)　BC 間で摩擦力に抗してした仕事が，水温の上昇に要した熱量に等しいから

$$\mu mgl\cos\theta = mcT$$

$$\begin{aligned}ゆえに\quad T &= \frac{\mu mg\cos\theta}{mc}\cdot l \\ &= \frac{\mu g\cos\theta}{c}\times\left\{\frac{km_i^2q^2}{2\mu^2m^3g^3(\mu\cos\theta - \sin\theta)\cos^2\theta} - \frac{m_i q}{\mu mg\cos\theta}\right\} \\ &= \frac{km_i^2q^2}{2\mu cm^3g^2(\mu\cos\theta - \sin\theta)\cos\theta} - \frac{m_i g}{mc}\ [℃]\end{aligned}$$