$\boxed{1}$ $x$についての多項式 $P(x)$ を $x^2+x+1$ で割った余りが $x+1$，$x^2-x+1$ で割った余りが $x-1$ のとき，$P(x)$ を $(x^2+x+1)(x^2-x+1)$ で割った余りは $\boxed{\text{ア}}$ である.

$\boxed{2}$ $k$ を実数とする。3 次式 $f(x)=x^3-kx^2-1$ に対し，方程式 $f(x)=0$ の 3 つの解を $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ とする。$g(x)$ は $x^3$ の係数が 1 である 3 次式で，方程式 $g(x)=0$ の 3 つの解が $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, $\gamma\alpha$ であるものとする。

(1) $g(x)$ を $k$ を用いて表せ。

(2) 2 つの方程式 $f(x)=0$ と $g(x)=0$ が共通の解をもつような $k$ の値を求めよ。

$\boxed{3}$ 正の定数 $a$，$b$ に対し，$f(x) = ax^2 - b$ とおく。次の問いに答えよ。

(1) $f(f(x)) - x$ は $f(x) - x$ で割り切れることを示せ。

(2) 方程式 $f(f(x)) - x = 0$ が異なる 4 つの実数解をもつための $a$，$b$ の条件を求めよ。

$\boxed{4}$

(1) $\sqrt[3]{2}$ が無理数であることを証明せよ.

(2) $P(x)$ は有理数を係数とする $x$ の多項式で，$P(\sqrt[3]{2}) = 0$ を満たしているとする．このとき $P(x)$ は $x^3 - 2$ で割り切れることを証明せよ.

$\boxed{5}$ $a,\ b,\ c,\ x,\ y,\ z$ はすべて正の実数である。次の問いに答えよ。

(i) 不等式 $(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2) \geqq (ax+by+cz)^2$ が成り立つことを証明せよ。

(ii) (i)において等号が成り立つのはどのようなときかを示せ。

(iii) $a^2+b^2+c^2=25,\ x^2+y^2+z^2=36,\ ax+by+cz=30$ のとき，$\dfrac{a+b+c}{x+y+z}$ の値を求めよ。

$\boxed{6}$ (1) $a,\ b>0$ とする。このとき

$$\frac{a+b}{2} \geqq \sqrt{ab}$$

であることを証明せよ。また，等号が成立するのは $a=b$ の場合だけであることを示せ。

(2) $a,\ b,\ c>0$ とする。このとき

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geqq 8abc$$

であることを証明せよ。また，等号が成立するのはどのような場合か述べよ。

(3) $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ を三角形の3辺の長さとする。このとき

$$\alpha\beta\gamma \geqq (-\alpha+\beta+\gamma)(\alpha-\beta+\gamma)(\alpha+\beta-\gamma)$$

であることを証明せよ。また，等号が成立するのは正三角形の場合だけであることを示せ。

(4) $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ を三角形の3辺の長さとする。このとき

$$\frac{\alpha}{-\alpha+\beta+\gamma}+\frac{\beta}{\alpha-\beta+\gamma}+\frac{\gamma}{\alpha+\beta-\gamma} \geqq 3$$

であることを証明せよ。また，等号が成立するのは正三角形の場合だけであることを示せ。

$\boxed{7}$ 直線 $l : 4x - y - 1 = 0$ と 2 点 A$(7, 10)$ と B$(9, 1)$ が座標平面上にある。

(i) 直線 $l$ に関して点 A と対称な点 C の座標は $\left(-\boxed{(1)}, \boxed{(2)\ (3)}\right)$ である。

(ii) △ABC の外心の座標は $\left(\dfrac{\boxed{(4)}}{\boxed{(5)}}, \boxed{(6)}\right)$ である。

(iii) 直線 $l$ に関して点 B と対称な点を D とする。直線 $l$ 上に点 P をとるとき，△PAC = △PBD が成り立つ点 P の座標は，$\left(\dfrac{\boxed{(7)}}{\boxed{(8)}}, \dfrac{\boxed{(9)\ (10)}}{\boxed{(11)}}\right)$ または $\left(-\boxed{(12)}, -\boxed{(13)}\right)$ である。前者の座標を持つ点を $\mathrm{P}_1$，後者の座標を持つ点を $\mathrm{P}_2$ とすると，$\triangle \mathrm{P}_1\mathrm{AC} = \dfrac{\boxed{(14)\ (15)}}{\boxed{(16)}}$，$\triangle \mathrm{P}_2\mathrm{AC} = \boxed{(17)\ (18)}$ である。

$\boxed{8}$ $xy$ 平面上に，曲線 $C_1 : y = \dfrac{x^2}{8} - 2$ と，原点を中心とする半径 1 の円 $C_2$ がある。

(1) $t$ を実数とする。曲線 $C_1$ 上の点 $\left(t, \dfrac{t^2}{8} - 2\right)$ から円 $C_2$ へ引いた 2 本の接線が，それぞれ点 $\mathrm{P}_1$, $\mathrm{P}_2$ で $C_2$ と接する。$\mathrm{P}_1$, $\mathrm{P}_2$ を通る直線 $l$ の方程式を求めよ。

(2) (1) で求めた直線 $l$ は，$t$ の値にかかわらず，ある円に接することを示し，その円の方程式を求めよ。

$\boxed{9}$　$x$-$y$ 平面の双曲線 $y = \dfrac{1}{x}$ 上の相異なる 3 点を，A，B，C とし，その $x$ 座標を，それぞれ，$a$，$b$，$c$ とする。このとき，次の各問に答えよ。

(**1**)　空欄にあてはまる数式を求め，答のみ解答欄に記入せよ。

直線 AB に垂直な直線の傾きは $\boxed{(ア)}$ である。△ABC の垂心を H とするとき，H の $x$，$y$ 座標を $a$，$b$，$c$ を用いて表すと，$x = \boxed{(イ)}$，$y = \boxed{(ウ)}$ である。よって，A，B，C が双曲線上を動くとき，H の軌跡は $x$，$y$ の関係式 $\boxed{(エ)}$ で表され，H はこの関係式で表される図形上のすべての点を動く。

(**2**)　△ABC の外心を P$(x,\ y)$ とする。

(i)　P の座標 $x$，$y$ を，$a$，$b$，$c$ を用いて表せ。

(ii)　$a$，$b$，$c$ が, $a + b = 0$，$c = 1$ を満たすとき，P$(x,\ y)$ の軌跡を求め，その軌跡を解答欄の $x$-$y$ 平面に図示せよ。

$\boxed{10}$　$(x,\ y)$ 平面上の 2 点 A$(0,\ 4)$ と B$(0,\ 1)$ からの距離の比が $2 : 1$ である点を P とするとき，以下の問いに答えなさい。

(1)  点 P の軌跡を求めなさい。

(2)  点 P が(1)の軌跡上を動くとき，線分 AP の通過する部分の面積を求めなさい。

(3)  点 P の座標を $(p,\ q)$ としたとき，$p + q = X$，$pq = Y$ として，$X$ と $Y$ の満たすべき条件を示し，点 $(X,\ Y)$ の取りうる範囲を図示しなさい。

$\boxed{11}$ 座標平面上の点 $(x,\ y)$ に対し $f(x,\ y)$，$g(x,\ y)$ を次で定める．

$$f(x,\ y) = (x-3)^2 + y^2 - 4$$

$$g(x,\ y) = \sqrt{3}\,x - 4y$$

以下の問いに答えよ．

(1) 連立不等式

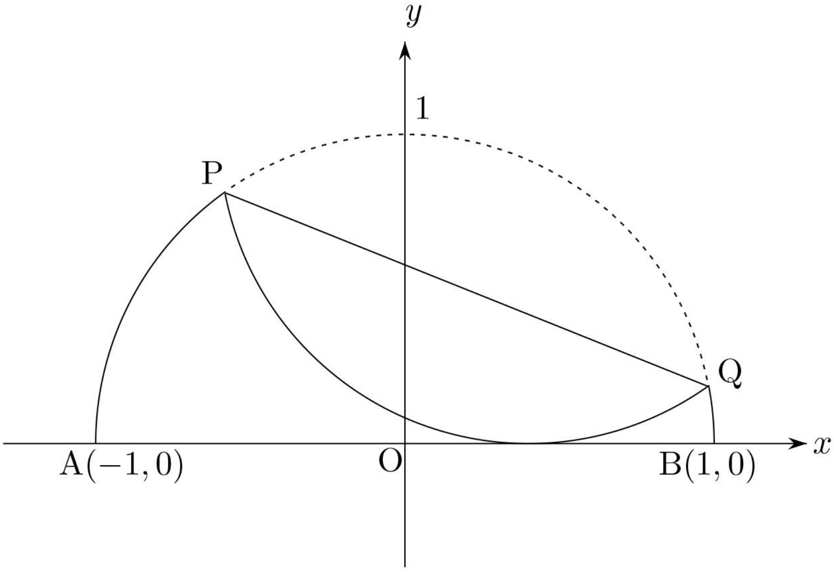
$$f(x,\ y) \leqq 0\,,\quad g(x,\ y) \leqq 0$$

の表す領域を $D$ とする．$D$ を図示せよ．

(2) 円 $f(x,\ y) = 0$ と直線 $g(x,\ y) = 0$ の交点において，円 $f(x,\ y) = 0$ と接する直線の方程式を求めよ．

(3) $D$ を(1)で定めた領域とする．点 $(x,\ y)$ が領域 $D$ 内を動くとき，$ax + y$ の最大値，最小値を求めよ．ただし，$a$ は正の定数である．

$\boxed{12}$　A$(-1,0)$，B$(1,0)$ を直径とする下の図のような半円がある。弧 AB 上に 2 点 P，Q を取り，弦 PQ を折り目として弧 PQ を $x$ 軸に接するように折り返す。接点の $x$ 座標を $t\,(-1 \leqq t \leqq 1)$ とするとき，以下の問いに答えよ。




(1) 2 点 P，Q を通る直線の方程式を求めよ。

(2) $t$ が $-1$ から 1 まで動くとき，弦 PQ が通過する範囲を図示し，その面積を求めよ。

$\boxed{13}$ 関数 $f(x)=2\sin^2 x+4\sin x+3\cos 2x$ について，以下の問いに答えよ。ただし，$0 \leqq x < 2\pi$ である。

(1) $t=\sin x$ とするとき，$f(x)$ を $t$ の式で表せ。

(2) $f(x)$ の最大値と最小値を求めよ。また，そのときの $x$ の値をすべて求めよ。

(3) 方程式 $f(x)=a$ の相異なる解が 4 個であるような実数 $a$ の値の範囲を求めよ。

$\boxed{14}$ $f(x)$，$g(t)$ を

$$f(x)=x^3-x^2-2x+1$$
$$g(t)=\cos 3t-\cos 2t+\cos t$$

とおく。

(1) $2g(t)-1=f(2\cos t)$ が成り立つことを示せ。

(2) $\theta=\dfrac{\pi}{7}$ のとき，$2g(\theta)\cos\theta=1+\cos\theta-2g(\theta)$ が成り立つことを示せ。

(3) $2\cos\dfrac{\pi}{7}$ は 3 次方程式 $f(x)=0$ の解であることを示せ。

$\boxed{15}$ 中心O，半径1の円周上の定点Aと動点P，Qがあり，P，Qは常に$\angle\mathrm{PAQ}=120^\circ$を満たしながら動いている．$\angle\mathrm{OAP}=\theta$として次の各問に答えよ．

(1) $\theta$の動ける範囲は $\boxed{\text{あい}}^\circ < \theta < \boxed{\text{うえ}}^\circ$ である．

(2) AP，AQを$\sin\theta$，$\cos\theta$を用いて表すと，

$$\mathrm{AP}=\boxed{\text{お}}\cos\theta,\quad \mathrm{AQ}=\sqrt{\boxed{\text{か}}}\sin\theta+\boxed{\text{＊き}}\cos\theta$$

となる．

(3) $\triangle\mathrm{OPQ}$の面積は，点P，Qがどこにあっても常に $\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{く}}}}{\boxed{\text{け}}}$ である．

(4) $\triangle\mathrm{APQ}$の面積$S(\theta)$を$\sin 2\theta$，$\cos 2\theta$を用いて表すと，

$$S(\theta)=\frac{\boxed{\text{こ}}}{\boxed{\text{さ}}}\sin 2\theta-\frac{\sqrt{\boxed{\text{し}}}}{\boxed{\text{す}}}\cos 2\theta-\frac{\sqrt{\boxed{\text{せ}}}}{\boxed{\text{そ}}}$$

となり，$S(\theta)$は$\theta=\boxed{\text{たち}}^\circ$のとき最大値 $\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{つ}}}}{\boxed{\text{て}}}$ をとる．

$\boxed{16}$ 中心O，半径$\sqrt{15}$の円$C$上の点P，Qにおける接線が点Rで交わるとする。
また，$\cos\angle\mathrm{POQ}=-\dfrac{1}{4}$とする。

(1) PQの長さを求めよ。

(2) PRの長さを求めよ。

(3) $C$と接する直線が線分PRおよび線分QRとそれぞれ点Sおよび点Tで交わり，さらに$\mathrm{PS}=1$であるとき，三角形RSTの面積を求めよ。

$\boxed{17}$ 次の問いに答えよ。

(1) $t$ を実数とする。$x$ についての方程式 $2^x + 2^{-x} = t$ の実数解の個数を調べよ。

(2) $a$ と $b$ を実数とし，$x$ についての方程式 $4^x + 4^{-x} + a(2^x + 2^{-x}) + b = 0$ が，ちょうど 3 個の実数解をもつとする。このとき，点 $(a,\ b)$ の存在する範囲を図示せよ。

$\boxed{18}$ 次の問いに答えよ。

(i) 不等式 $3^{x+1} \leqq 11 + 4 \times 3^{-x}$ を解け。

(ii) $n$ を 2 以上の整数とする。$n$ の $n$ 乗が $n$ 桁の数となるような $n$ の値をすべて求めよ。ただし，$\log_{10} 2 = 0.3010$，$\log_{10} 3 = 0.4771$，$\log_{10} 7 = 0.8451$ とする。

$\boxed{19}$ すべての実数 $x$ を定義域とする 3 次関数 $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x$ を考える.

**(1)** $f(x)$ の極大値は $\boxed{(1)}$ であり，極小値は $\boxed{(2)}\boxed{(3)}\boxed{(4)}$ である.

**(2)** $f(x) = 0$ を満たすどの実数 $x$ よりも大きい整数のうちで，最小のものは $\boxed{(5)}$ である.

**(3)** $r = \dfrac{5}{3}$ とおく．$3^r$ よりも小さい整数のうちで，最大のものは $\boxed{(6)}$ である.

**(4)** 実数 $t$ が $|t-1| \leqq \dfrac{2}{3}$ を満たす範囲を動くとき，$3^{3t} - 3^{2t+1} - 3^{t+2}$ は $t = \dfrac{\boxed{(7)}}{\boxed{(8)}}$ で最小値をとり，$t = \dfrac{\boxed{(9)}}{\boxed{(10)}}$ で最大値をとる.

$\boxed{20}$ $a, b$ を定数とし，4 次関数 $f(x)$ を次のように定める。

$$f(x) = x^4 - \frac{4}{3}x^3 + a\left(\frac{4}{3}x^3 - 2x^2\right) + 2b(x^2 - 2x)$$

以下の問いに答えよ。

(1) 方程式 $f'(x) = 0$ が相異なる 3 つの実数解をもつための $a, b$ の条件を求めよ。

(2) 関数 $f(x)$ が極値をとる $x$ の値がただ 1 つであるための $a, b$ の条件を求め，その条件が表す図形を $ab$ 平面上に図示せよ。

(3) $a, b$ が (2) で求めた条件をみたすとき，$f(x)$ が極値をとる $x$ の値を求めよ。ただし，$x$ の値を表すのに必要ならば $a$ を用いてよい。また，極値は求めなくてよい。

$\boxed{21}$ $a$ を実数とし，関数 $f(x)$ を $f(x) = 2x^3 - 3(a+2)x^2 + 12ax$ で定める。

(1) $f(x)$ が極値をもつとき，その値は $\boxed{\text{タ}}$ である。

(2) $y = f(x)$ のグラフが $a$ の値に関係なく通る点で，原点 O でないものを A とする。点 A の座標は $\boxed{\text{チ}}$ である。

(3) 点 A を (2)で定めた点とする。線分 OA と $y = f(x)$ のグラフが 2 点 O，A 以外に共有点をもつ $a$ の値の範囲は $\boxed{\text{ツ}} < a < \boxed{\text{テ}}$ である。

(4) $x \geqq 0$ を満たすすべての実数 $x$ について，不等式 $f(x) \geqq 0$ が成り立つ $a$ の値の範囲は $\boxed{\text{ト}} \leqq a \leqq \boxed{\text{ナ}}$ である。

(5) $a \geqq 3.5$ を満たすすべての実数 $a$ について，方程式 $f(x) = k$ が 3 つの異なる実数解をもつ実数 $k$ の値の範囲は $\boxed{\text{ニ}} < k < \boxed{\text{ヌ}}$ である。

$\boxed{22}$ $a \geqq 0$ とし

$$S(a) = \int_0^1 |x^2 + 2ax + a^2 - 1|\,dx$$

とおく。

(1) $a = \dfrac{1}{2}$ のとき $S(a) = \dfrac{\boxed{\text{ホ}}}{\boxed{\text{マ}}}$ である。

(2) 等式

$$S(a) = \int_0^1 (x^2 + 2ax + a^2 - 1)\,dx$$

が成り立つ $a$ の範囲は $a \geqq \boxed{\text{ミ}}$ である。

(3) $a \geqq \boxed{\text{ミ}}$ のとき

$$S(a) = \boxed{\text{ム}}\,a^2 + \boxed{\text{メ}}\,a + \frac{\boxed{\text{モ}}}{\boxed{\text{ヤ}}}$$

であり，$0 \leqq a < \boxed{\text{ミ}}$ のとき

$$S(a) = \frac{\boxed{\text{ユ}}}{\boxed{\text{ヨ}}}a^3 + \boxed{\text{ラ}}\,a^2 + \boxed{\text{リ}}\,a + \frac{\boxed{\text{ル}}}{\boxed{\text{レ}}}$$

である。

(4) $S(a)$ は $a = \dfrac{\boxed{\text{ロ}} + \sqrt{\boxed{\text{ワ}}}}{\boxed{\text{ヲ}}}$ のとき最小値をとる。

$\boxed{23}$ 放物線 $y=x^2$ を $C$, $y=-x^2+2x+4$ を $D$ とする．実数 $t$ を用いて表される $D$ 上の点 $\mathrm{P}(t,\ -t^2+2t+4)$ における $D$ の接線を $l$ とする．

(1) $C$ と $D$ が異なる 2 点で交わることを示し，その $x$ 座標を求めよ．

(2) 接線 $l$ の方程式を $y=f(x)$ とする．$f(x)$ を求めよ．

(3) (1)で求めた 2 交点の $x$ 座標を $a$, $b$ $(a<b)$ とする．$a<t<b$ を満たす $t$ に対して，(2)で求めた接線 $l$ の方程式を $y=f(x)$ とする．次の連立不等式の表す領域の面積を $S(t)$ とする．

$$\begin{cases} y \geqq x^2 \\ y \leqq f(x) \\ y \geqq -x^2+2x+4 \end{cases}$$

$t$ が $a<t<b$ の範囲を動くとき，$S(t)$ が最小となる $t$ の値と，そのときの $S(t)$ の値を求めよ．

$\boxed{24}$ 2 つの曲線 $C_1 : y=-x^2+10$ と $C_2 : y=\dfrac{1}{2}x^2-6x+k$ がある。ただし，$k$ は実数とする。$C_1$, $C_2$ はそれぞれ直線 $l$ に接し，$C_1$ と $l$ の接点の $x$ 座標を $a$，$C_2$ と $l$ の接点の $x$ 座標を $b$ とする。

(1) $l$ の方程式を，$a$ を用いて表せ。

(2) $k$ を $a$ で表せ。

(3) $b>0$ であり，$C_2$ と $y$ 軸および $l$ で囲まれた図形の面積が $\dfrac{9}{2}$ であるとき，$a$ の値を求めよ。

$\boxed{25}$ 実数 $a,\ b$ に対し，関数 $f(x)$ を

$$f(x) = x^3 + ax + b$$

と定め，座標平面において曲線 $C : y = f(x)$ と，$C$ 上の点 $\mathrm{P}(t,\ f(t))$ を考える。ただし，$t \neq 0$ とする。直線 $l$ は点 P を通り，P と異なる点 Q で曲線 $C$ と接しているとする。さらに，直線 $l'$ は点 Q を通り，Q と異なる点 R で曲線 $C$ と接しているとする。

(1) 点 Q の $x$ 座標 $q$ を，$t$ を用いて表せ。また，直線 $l$ の傾き $m$ と $y$ 切片 $k$ を，$t,\ a,\ b$ を用いて表せ。

(2) $t > 0$ の場合に，$x \geqq 0$ において，曲線 $C$，直線 $l$，$y$ 軸で囲まれた図形の面積を $S_1$ とおき，$x \leqq 0$ において，曲線 $C$，直線 $l$，$y$ 軸で囲まれた図形の面積を $S_2$ とおく。$S_1,\ S_2$ をそれぞれ $t$ を用いて表せ。

(3) 直線 $l'$ の方程式が $y = 0$ のとき，$a,\ b$ を，それぞれ $t$ を用いて表せ。

$\boxed{26}$ $a$ を実数とする。$xy$ 平面上の 2 つの曲線 $C_1 : y = x^3$ と $C_2 : y = 2x^2 - ax$ を考える。

(1) 2 曲線 $C_1,\ C_2$ が異なる 3 つの交点をもつための $a$ の条件を求めよ。

(2) 2 曲線 $C_1,\ C_2$ が異なる 3 つの交点をもち，$C_1$ と $C_2$ で囲まれる 2 つの部分の面積が等しくなるような $a$ の値を求めよ。

$\boxed{27}$ 1辺の長さが1である正六角形の頂点を時計の針の回り方と逆回りに A, B, C, D, E, F とし，$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{AF}} = \overrightarrow{b}$ とする.

**(1)** $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = \dfrac{\boxed{(1)}\boxed{(2)}}{\boxed{(3)}}$, $(2\overrightarrow{a} + 3\overrightarrow{b}) \cdot (3\overrightarrow{a} - 2\overrightarrow{b}) = \dfrac{\boxed{(4)}\boxed{(5)}}{\boxed{(6)}}$ である.

**(2)** $\overrightarrow{\mathrm{AP}} = 2s\overrightarrow{a} + (3 - 3s)\overrightarrow{b}$ で与えられる点 P が △ACF の内部に存在するような実数 $s$ の値の範囲は

$$\frac{\boxed{(7)}}{\boxed{(8)}} < s < \frac{\boxed{(9)}}{\boxed{(10)}}$$

である.

**(3)** 正六角形 ABCDEF の外接円を S とする．S の周上の任意の点 Q に対して，ベクトル $\overrightarrow{q} = \overrightarrow{\mathrm{AQ}}$ は

$$\boxed{(11)}\boxed{(12)}\,\overrightarrow{q} \cdot \overrightarrow{q} + \boxed{(13)}\boxed{(14)}\,\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{q} + 2\overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{q} = 0$$

をみたす.

$\boxed{28}$ 三角形ABCの各辺AB, BC, CAを$1:2$に内分する点をそれぞれP, Q, Rとする。AQとCPの交点をS, BRとAQの交点をT, CPとBRの交点をUとする。$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\overrightarrow{c}$とするとき，次の問に答えよ。

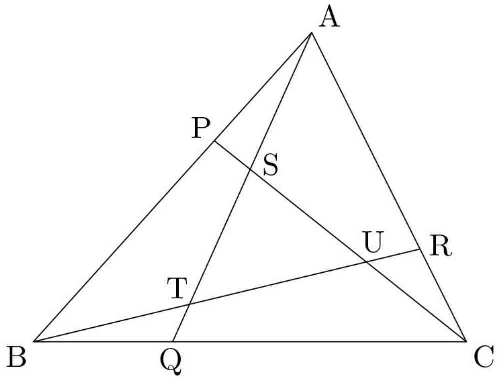
(1) $\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$を$\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$を用いて表せ。

(2) 点Qを通り辺ACと平行な直線と，BRの交点をVとするとき，$\overrightarrow{\mathrm{VQ}}$を$\overrightarrow{c}$を用いて表せ。

(3) $\overrightarrow{\mathrm{AT}}$を$\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$を用いて表せ。

(4) $\overrightarrow{\mathrm{AS}}$を$\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$を用いて表せ。

(5) $|\overrightarrow{b}|=1$, $|\overrightarrow{c}|=\sqrt{3}$, $\angle\mathrm{BAC}=90^\circ$であるとき，$|\overrightarrow{\mathrm{ST}}|$, $|\overrightarrow{\mathrm{SU}}|$, $\angle$TSUおよび三角形STUの面積を求めよ。




$\boxed{29}$ 一辺の長さが8である正四面体OABCの辺OA, OB, OC上に点D, E, Fがあって，$\mathrm{AD}=\mathrm{OE}=\mathrm{OF}=5$を満たしている。△DEFの重心Gを通り△DEFを含む平面に垂直な直線が，△ABCを含む平面と交わる点をHとする。$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\overrightarrow{c}$として，以下の問いに答えよ。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OG}}$を$\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$を用いて表せ。

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OH}}$を$\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$を用いて表せ。

(3) 四面体DEFHの体積を求めよ。

$\boxed{30}$ Oを原点とする $xyz$ 空間内に5点 $\mathrm{A}(-1,\ 0,\ 0)$, $\mathrm{B}(0,\ 2,\ 0)$, $\mathrm{C}(0,\ 0,\ 1)$, $\mathrm{D}(0,\ 0,\ 2)$, $\mathrm{E}(0,\ 0,\ 4)$ をとる。中心がD，半径が2の球面を $S$ とし，A，B，Cの定める平面を $\alpha$ とする。$S$ が $\alpha$ と交わってできる図形を $F$ とする。Dから $\alpha$ に垂線DHを下ろす。以下の問いに答えよ。

(1) $\alpha$ に垂直な単位ベクトルを求めよ。

(2) $F$ はHを中心とする円であることを示せ。

(3) $F$ の半径と中心の座標を求めよ。

(4) 点Pは $F$ 上を動く点とし，直線EPと $xy$ 平面との交点を $\mathrm{Q}(s,\ t,\ 0)$ とする。このとき，$s$, $t$ の満たす方程式を求めよ。

$\boxed{31}$ 1から $2n$ までの偶数の平方の和を $a_n$，奇数の平方の和を $b_n$ とする。すなわち

$$a_n = 2^2 + 4^2 + \cdots + (2n)^2,\quad b_n = 1^2 + 3^2 + \cdots + (2n-1)^2$$

である。なお，1から $n$ までの自然数の平方の和については

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

が成り立つ。次の問いに答えよ。

(1) 偶数の平方の和 $2^2 + 4^2 + \cdots + 20^2$ と奇数の平方の和 $1^2 + 3^2 + \cdots + 19^2$ を求めよ。

(2) $a_n$ と $b_n$ を求めよ。

(3) $\dfrac{1}{a_n} - \dfrac{3}{2n(2n+1)}$ および $\dfrac{1}{b_n} + \dfrac{3}{2n(2n+1)}$ を計算せよ。

(4) $c_n = \dfrac{1}{a_n} + \dfrac{1}{b_n}$ とするとき，$S_n = c_1 + c_2 + \cdots + c_n$ を求めよ。

$\boxed{32}$ 数列 1，1，2，1，2，4，1，2，4，8，1，2，4，8，16，1，2，$\cdots$ の第 $n$ 項を $a_n$ とする。以下の各問に答えよ。

(1) $a_{50}$ を求めよ。

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{50} a_k$ を求めよ。

(3) $a_m - a_{m+1} > 99999$ を満たす最小の自然数 $m$ の値を求めよ。ただし，$\log_{10} 2 = 0.3010$，$\log_{10} 3 = 0.4771$ とする。

$\boxed{33}$ 数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1 = \frac{3}{4}, \quad a_{n+1} = 1 - \frac{1}{4\,a_n} \ (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

で定める。以下の問に答えよ。

(1) $a_2$，$a_3$，$a_4$，$a_5$，$a_6$ を求めよ。また，それより一般項 $a_n$ を推定せよ。

(2) 数学的帰納法により，(1) に一般項の推定が正しいことを証明せよ。

(3) $n$ を正の整数とする。すべての実数 $x$ に対して，不等式

$$a_n x^2 + x + 1 \geqq a_{n+1}$$

が成り立つことを示せ。

(4) $n$ を正の整数とする。すべての実数 $x$ に対して，不等式

$$x^{2n} + x^{2n-1} + x^{2n-2} + \cdots + x^2 + x + 1 \geqq a_n$$

が成り立つことを示せ。

$\boxed{34}$ 1 から 10 までの数字を 1 つずつ書いた 10 枚のカードを数字の小さい順に左から右に並べる。この中から 3 枚を無作為に選び, いずれのカードも元の位置と異なる位置に置くという操作を考える。この操作を 2 回以上続けて行う場合, 2 回目以降はカードの並びを一番最初の状態に戻すことはせず, 1 回前の操作で置き換えられた状態から 3 枚を無作為に選ぶ。また, 選んだ 3 枚のカードについて元の位置と異なる位置への置き方が複数あるとき, いずれの置き方も等しい確率で選ばれるものとする。置き換えの操作を $n$ 回続けて行ったとき, 一番左のカードが 10 である確率を $P_n$ で表す。

(1) $P_1 = \dfrac{\boxed{\text{ハ}}}{\boxed{\text{ヒ}}}$ である。

(2) $n$ 回の操作の後で一番左のカードが 10 であり, $(n+1)$ 回目の操作の後も一番左のカードが 10 となる確率を $P_n$ の式で表すと $\dfrac{\boxed{\text{フ}}}{\boxed{\text{ヘ}}} P_n$ となる。

(3) $n$ 回の操作の後で一番左のカードが 10 ではなく, $(n+1)$ 回目の操作の後で一番左のカードが 10 となる確率を $P_n$ の式で表すと $\dfrac{\boxed{\text{ホ}}\, P_n + \boxed{\text{マ}}}{\boxed{\text{ミ}}}$ となる。

(4) $P_{n+1}$ を $P_n$ の式で表すと

$$P_{n+1} = \frac{\boxed{\text{ム}}}{\boxed{\text{メ}}} P_n + \frac{\boxed{\text{モ}}}{\boxed{\text{ヤ}}}$$

となる。

(5) $P_n = \dfrac{\boxed{\text{ユ}}}{\boxed{\text{ヨ}}} \left( \dfrac{\boxed{\text{ラ}}}{\boxed{\text{リ}}} \right)^n + \dfrac{\boxed{\text{ル}}}{\boxed{\text{レ}}}$ である。

$\boxed{35}$

容器A，Bにそれぞれ質量パーセント濃度30%，10%の砂糖水が100gずつ入っている．BからAに20gを移し，よくかき混ぜた後に，Aから20gを取り出してBに戻し，再びよくかき混ぜる．これを1回として，この操作を何度も繰り返す．$n$回目の操作後のA，Bの中の砂糖水の濃度をそれぞれ$x_n$%，$y_n$%とするとき，以下の問に答えよ．

(1) 濃度10%の砂糖水20gと濃度30%の砂糖水100gに含まれる砂糖の重さの和は $\boxed{\text{さし}}$ gである．

(2) 1回目の操作後のBの中の砂糖の重さは $\dfrac{\boxed{\text{すせ}}}{\boxed{\text{そ}}}$ gである．

したがって，$x_1 = \dfrac{\boxed{\text{たち}}}{\boxed{\text{つ}}}$，$y_1 = \dfrac{\boxed{\text{てと}}}{\boxed{\text{な}}}$ である．

(3) $x_{n+1}$，$y_{n+1}$ を $x_n$，$y_n$ を用いて表すと

$$x_{n+1} = \frac{\boxed{\text{に}}}{\boxed{\text{ぬ}}}x_n + \frac{\boxed{\text{ね}}}{\boxed{\text{の}}}y_n,\quad y_{n+1} = \frac{\boxed{\text{は}}}{\boxed{\text{ひ}}}x_n + \frac{\boxed{\text{ふ}}}{\boxed{\text{へ}}}y_n$$

となる．

(4) AとBの濃度の差が初めて0.1%以下になるのは，$\boxed{\text{ほま}}$ 回目である．ただし，$\log_{10} 2 = 0.301$，$\log_{10} 3 = 0.477$ を用いよ．