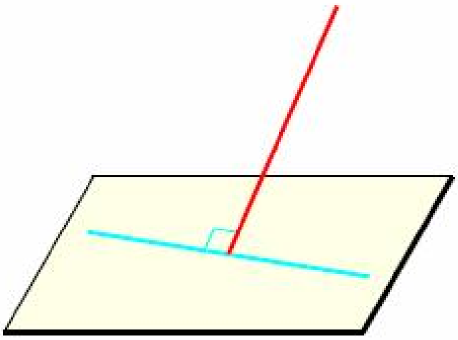
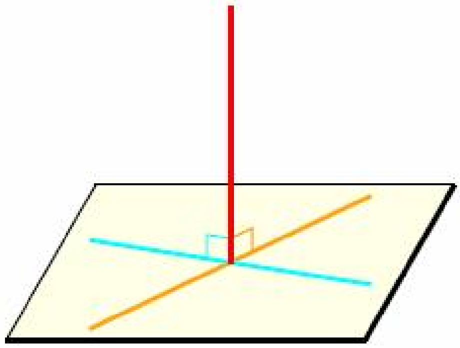
平面に下ろした垂線の足と四面体の体積

「平面に下ろした垂線の足」は，**「直線と平面の垂直条件」**を用いて求める．
「直線と平面の垂直条件」は，**「平面上の任意の２直線と垂直」**である．

「1直線と垂直」だけでは「平面と垂直」が保証されない (左下図).
「2直線と垂直」ならば，「平面と垂直」が保証される (右下図).



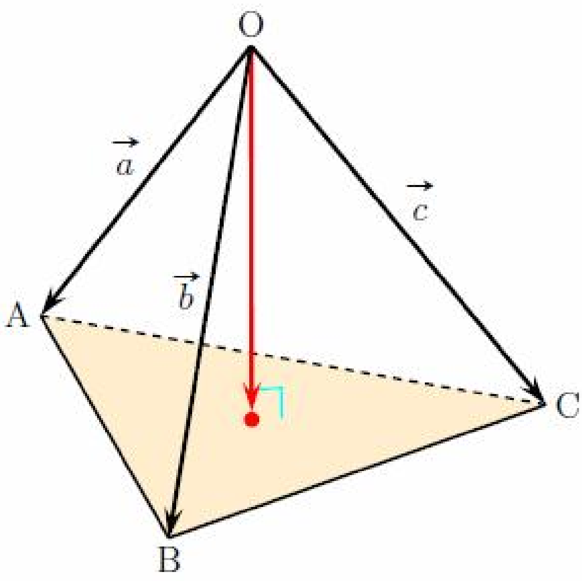


空間ベクトルの問題では, 次のように考えて条件を立式する.

$$\text{OH} \perp \text{平面 ABC} \iff \overrightarrow{\text{OH}} \perp \overrightarrow{\text{AB}} \text{ かつ } \overrightarrow{\text{OH}} \perp \overrightarrow{\text{AC}}$$

1辺の長さが2の正四面体OABCにおいて, 頂点Oから平面ABCに下ろした垂線の足をHとし, $\overrightarrow{\text{OA}} = \vec{a}$, $\overrightarrow{\text{OB}} = \vec{b}$, $\overrightarrow{\text{OC}} = \vec{c}$ とする.

(1) $\overrightarrow{\text{OH}}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ で表せ.　　(2) 体積 V を求めよ.



(1) 点 H は平面 ABC 上にあるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = s\vec{a} + t\vec{b} + u\vec{c} \quad (s+t+u=1)$$

$\overrightarrow{\mathrm{OH}} \perp \overrightarrow{\mathrm{AB}},\ \overrightarrow{\mathrm{OH}} \perp \overrightarrow{\mathrm{AC}}$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}} = (s\vec{a} + t\vec{b} + u\vec{c}) \cdot (\vec{b} - \vec{a}) = 0$$
$$\overrightarrow{\mathrm{OH}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} = (s\vec{a} + t\vec{b} + u\vec{c}) \cdot (\vec{c} - \vec{a}) = 0$$

よって $-s|\vec{a}|^2 + t|\vec{b}|^2 + (s-t)\vec{a}\cdot\vec{b} + u\vec{b}\cdot\vec{c} - u\vec{c}\cdot\vec{a} = 0$

$-s|\vec{a}|^2 + u|\vec{c}|^2 - t\vec{a}\cdot\vec{b} + t\vec{b}\cdot\vec{c} + (s-u)\vec{c}\cdot\vec{a} = 0$

ここで $|\vec{a}|^2 = |\vec{b}|^2 = |\vec{c}|^2 = 4$

また $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{c} = \vec{c}\cdot\vec{a} = 2\cdot 2\cdot\cos 60^\circ = 2$

よって $-s+t=0,\ -s+u=0$ より $s=\dfrac{1}{3},\ t=\dfrac{1}{3},\ u=\dfrac{1}{3}$

$$\therefore\quad \overrightarrow{\mathrm{OH}} = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c}$$

(2)
$$\begin{aligned}|\overrightarrow{\mathrm{OH}}|^2 &= \left|\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c}\right|^2 \\ &= \frac{1}{9}|\vec{a}|^2 + \frac{1}{9}|\vec{b}|^2 + \frac{1}{9}|\vec{c}|^2 + \frac{2}{9}\vec{a}\cdot\vec{b} + \frac{2}{9}\vec{b}\cdot\vec{c} + \frac{2}{9}\vec{c}\cdot\vec{a} \\ &= \frac{1}{9}\cdot 4 + \frac{1}{9}\cdot 4 + \frac{1}{9}\cdot 4 + \frac{2}{9}\cdot 2 + \frac{2}{9}\cdot 2 + \frac{2}{9}\cdot 2 = \frac{24}{9}\end{aligned}$$

よって $|\overrightarrow{\mathrm{OH}}| = \dfrac{2\sqrt{6}}{3}$

ここで $\triangle\mathrm{ABC} = \dfrac{1}{2}\cdot 2\cdot 2\cdot\sin 60^\circ = \sqrt{3}$

$$\therefore\quad V = \frac{1}{3}\cdot\triangle\mathrm{ABC}\cdot\mathrm{OH} = \frac{1}{3}\cdot\sqrt{3}\cdot\frac{2\sqrt{6}}{3} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

点 H は**「平面 ABC 上にある」「直線 OH と平面 ABC が垂直」**の 2 条件で定まる.
まず, 平面上にある条件から, $\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ を実数 $s,\ t,\ u$ を用いて設定する.
この $\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ を用いて, 垂直条件を立式する.
基本ベクトルの大きさと内積の値を代入して連立すると, $\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ が求まる.
内積の値は定義から求める. $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$ (平面と同じ)
三角形は, $|\vec{a}|,\ |\vec{b}|,\ \vec{a}\cdot\vec{b}$ の 3 要素で決定した.
四面体は, $|\vec{a}|,\ |\vec{b}|,\ |\vec{c}|,\ \vec{a}\cdot\vec{b},\ \vec{b}\cdot\vec{c},\ \vec{c}\cdot\vec{a}$ の 6 要素で決定する.
よって, 空間図形の計量をベクトルで行う場合, 原則この 6 要素の値が必要になる.
本問は, 正四面体であるから, 大きさと内積はそれぞれ全てが一致する.
体積を求めるには, 垂線の長さ (垂線ベクトルの大きさ) が必要である.
$|\overrightarrow{\mathrm{OH}}|$ は, 一旦 2 乗して展開し, 内積の値に帰着させる.
3 つのベクトルの和を展開するとき, 次の展開公式を用いる (要暗記).
展開公式 $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$
本問では, $\dfrac{1}{9}|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}|^2$ とすべきだが, 一般の場合を考えて丸ごと 2 乗した.
底面は正三角形であるから, 底面積は三角比の公式により直ちに求まる.

4 点 O(0, 0, 0), A(0, −1, 2), B(−1, 0, 5), C(1, 1, 3) を頂点とする四面体の体積 V を求めよ.

頂点 O から底面 ABC に下ろした垂線の足を H とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = s\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{OB}} + (1-s-t)\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OH}} &= s(0,\ -1,\ 2) + t(-1,\ 0,\ 5) + (1-s-t)(1,\ 1,\ 3)\\ &= (-s-2t+1,\ -2s-t+1,\ -s+2t+3)\end{aligned}$$

$\overrightarrow{\mathrm{OH}} \perp \overrightarrow{\mathrm{AB}},\ \overrightarrow{\mathrm{OH}} \perp \overrightarrow{\mathrm{AC}}$ より

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}} &= (-s-2t+1,\ -2s-t+1,\ -s+2t+3)\cdot(-1,\ 1,\ 3)\\ &= -(-s-2t+1) + (-2s-t+1) + 3(-s+2t+3)\\ &= -4s+7t+9 = 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}} &= (-s-2t+1,\ -2s-t+1,\ -s+2t+3)\cdot(1,\ 2,\ 1)\\ &= (-s-2t+1) + 2(-2s-t+1) + (-s+2t+3)\\ &= -6s-2t+6 = 0\end{aligned}$$

よって　$s = \dfrac{6}{5},\ t = -\dfrac{3}{5}$　より　$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \left(1,\ -\dfrac{4}{5},\ \dfrac{3}{5}\right)$

ゆえに　$\left|\overrightarrow{\mathrm{OH}}\right| = \sqrt{1^2 + \left(-\dfrac{4}{5}\right)^2 + \left(\dfrac{3}{5}\right)^2} = \sqrt{2}$

また　$$\begin{aligned}\triangle\mathrm{ABC} &= \frac{1}{2}\sqrt{\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|^2\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|^2 - (\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}})^2}\\ &= \frac{1}{2}\sqrt{(\sqrt{11})^2\cdot(\sqrt{6})^2 - 4^2} = \frac{5\sqrt{2}}{2}\end{aligned}$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{V} = \frac{1}{3}\cdot\triangle\mathrm{ABC}\cdot\mathrm{OH} = \frac{1}{3}\cdot\frac{5\sqrt{2}}{2}\cdot\sqrt{2} = \boldsymbol{\frac{5}{3}}$$

座標空間上の四面体の体積 を求めるパターン問題である.
自分で基本ベクトルを設定するわけだが, 本問の場合の始点は O しかないだろう.
3 変数で設定すると大変そうなので, 最初から u を消去した形で $\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ を設定した.
計算を成分で行っていく以外の手順は全く同じである.
$\left|\overrightarrow{\mathrm{OH}}\right|$ は, $\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \dfrac{1}{5}(5,\ -4,\ 3)$ として計算すると楽になる.
$\left|\overrightarrow{\mathrm{OH}}\right| = \dfrac{1}{5}\sqrt{5^2+(-4)^2+3^2} = \dfrac{1}{5}\cdot\sqrt{50} = \dfrac{1}{5}\cdot 5\sqrt{2} = \sqrt{2}$
ちょっとした工夫により, 計算ミスが減り, 時間的なゆとりが生じる.
本番で突然できるはずはないので, 普段から意識を高めておく必要がある.
底面積は, **三角形の面積のベクトル表示**(要暗記) を用いて求める.
なお, 座標空間上の点が与えられた場合, 無理して正確に図示しなくてもよい.
本問でも, 4 点が四面体を作るイメージさえできていれば, 図示する必要すらない.
さて, 空間の成分は, 縦に書くとみやすい. 特に, 内積はわかりやすい.

$$\begin{pmatrix}-s-2t+1\\ -2s-t+1\\ -s+2t+3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ 3\end{pmatrix} = -(-s-2t+1) + (-2s-t+1) + 3(-s+2t+3)$$

原点 O から 3 点 A(1, 0, 0), B(0, 2, 0), C(0, 0, 3) を通る平面に下ろした垂線の足を H とする.

(1) 点 H の座標を求めよ.　　(2) △ABC の面積 S を求めよ.

(1) 点 H は平面 ABC 上にあるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = s\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{OB}} + u\overrightarrow{\mathrm{OC}} \quad (s+t+u=1)$$

$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = s(1,\ 0,\ 0) + t(0,\ 2,\ 0) + u(0,\ 0,\ 3) = (s,\ 2t,\ 3u)$

$\overrightarrow{\mathrm{OH}} \perp \overrightarrow{\mathrm{AB}},\ \overrightarrow{\mathrm{OH}} \perp \overrightarrow{\mathrm{AC}}$ より

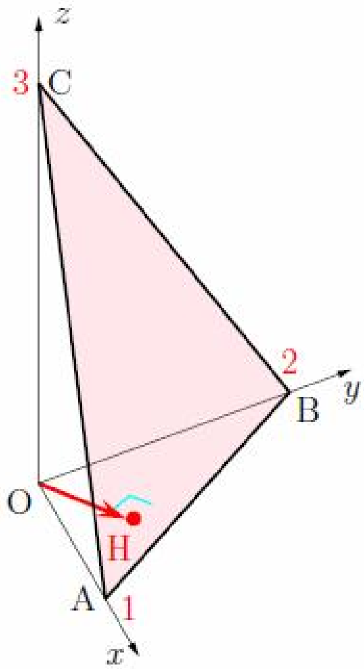
$\overrightarrow{\mathrm{OH}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}} = (s,\ 2t,\ 3u) \cdot (-1,\ 2,\ 0) = -s + 4t = 0$

$\overrightarrow{\mathrm{OH}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} = (s,\ 2t,\ 3u) \cdot (-1,\ 0,\ 3) = -s + 9u = 0$

よって　$s = \dfrac{36}{49},\ t = \dfrac{9}{49},\ u = \dfrac{4}{49}$

ゆえに　$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \left(\dfrac{36}{49},\ \dfrac{18}{49},\ \dfrac{12}{49}\right)$

$$\therefore\quad \mathbf{H}\left(\frac{\mathbf{36}}{\mathbf{49}},\ \frac{\mathbf{18}}{\mathbf{49}},\ \frac{\mathbf{12}}{\mathbf{49}}\right)$$



(2) $\mathrm{OH} = \left|\overrightarrow{\mathrm{OH}}\right| = \dfrac{6}{49}\sqrt{6^2+3^2+2^2} = \dfrac{6}{7}$

四面体 OABC の体積を V とする.

△OAB を底面とみると　$V = \dfrac{1}{3} \times \triangle\mathrm{OAB} \times \mathrm{OC} = \dfrac{1}{3} \times 1 \times 3 = 1$

△ABC を底面とみると　$V = \dfrac{1}{3} \times S \times \mathrm{OH}$

$$\therefore\quad \boldsymbol{S} = \frac{3V}{\mathrm{OH}} = \frac{3 \cdot 1}{\frac{6}{7}} = \frac{\mathbf{7}}{\mathbf{2}}$$

前問と全く同じである. 成分に 0 が多いので, u を用いた形で設定した.
連立方程式は, まず $t = \dfrac{s}{4},\ u = \dfrac{s}{9}$ を $s+t+u=1$ に代入して s を求める.
(2) は, 三角形の面積のベクトル表示で求めることも可能である.
しかし, 本問では **体積を 2 通りに表す** 方法で求めよう.
垂線 OH の長さは, $\sqrt{\left(\dfrac{36}{49}\right)^2 + \left(\dfrac{18}{49}\right)^2 + \left(\dfrac{12}{49}\right)^2}$ などとすると地獄絵図になる.
$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \dfrac{6}{49}(6,\ 3,\ 2)}$ としてから大きさを求める.
$\left|\overrightarrow{\mathrm{OH}}\right|^2 = \left(\dfrac{6}{49}\right)^2(6^2+3^2+2^2)$ であるから, 結局 $\dfrac{6}{49}$ の 2 乗の計算は必要ない.
なお, 本問の 3 点は, **座標軸上の点であるから図示が容易** である.
このような場合は, 積極的に座標空間に図示してみよう.