$\boxed{1}$ **（ベクトルの演算）**

(1)　正六角形 ABCDEF において $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{AF}} = \overrightarrow{b}$ とするとき,

$$\overrightarrow{\mathrm{AE}},\ \overrightarrow{\mathrm{BF}},\ \overrightarrow{\mathrm{AD}},\ \overrightarrow{\mathrm{FD}}$$

をそれぞれ $\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$ で表せ。

(2)　立方体 ABCD − EFGH において $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}} = \overrightarrow{d}$，$\overrightarrow{\mathrm{AE}} = \overrightarrow{e}$ とするとき,

$$\overrightarrow{\mathrm{AG}},\ \overrightarrow{\mathrm{FH}},\ \overrightarrow{\mathrm{CE}}$$

をそれぞれ $\overrightarrow{b}$，$\overrightarrow{d}$，$\overrightarrow{e}$ で表せ。

$\boxed{2}$ **（平行条件，中点連結定理）**

△ABC において辺 AB の中点を M，辺 AC の中点を N とするとき,

$$\mathrm{MN} /\!/ \mathrm{BC},\quad 2\,\mathrm{MN} = \mathrm{BC}$$

が成り立つことをベクトルを用いて証明せよ。

$\boxed{3}$ **（位置ベクトル，内分点・外分点）**

$\triangle$ABC の各頂点 A, B, C の位置ベクトルをそれぞれ $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ とする。

(1) $m > 0$, $n > 0$ とするとき，AB を $m : n$ に内分する点 P の位置ベクトル $\overrightarrow{p}$ は

$$\overrightarrow{p} = \frac{n\overrightarrow{a} + m\overrightarrow{b}}{m+n}$$

であることを示せ。

(2) $\triangle$ABC の重心 G の位置ベクトル $\overrightarrow{g}$ を $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ で表せ。

(3) $\mathrm{BC} = a$, $\mathrm{CA} = b$, $\mathrm{AB} = c$ とするとき，$\triangle$ABC の内心 I の位置ベクトル $\overrightarrow{i}$ を a, b, c, $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ で表せ。

$\boxed{4}$ **（内積の計算，面積公式）**

平面上の 3 点 O, A, B は条件

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right| = \left|\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}}\right| = \left|2\,\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}}\right| = 1$$

を満たす。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}}$ および $\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|$ を求めよ。

(2) $\triangle$OAB の面積 S を求めよ。

(3) 頂点 O から直線 AB におろした垂線の足を H とするとき，OH の長さを求めよ。

$\boxed{5}$ **（ベクトルの成分表示，１次結合）**

$\overrightarrow{a} = (1,\ 2),\ \overrightarrow{b} = (1,\ -1),\ \overrightarrow{c} = (7,\ 2)$ とする。

(1) ベクトル $\overrightarrow{c}$ を $\overrightarrow{c} = p\overrightarrow{a} + q\overrightarrow{b}$ の形で表せ。

(2) ベクトル $k\overrightarrow{c} - \overrightarrow{b}$ が $\overrightarrow{a}$ と平行となるような実数 k を求めよ。

$\boxed{6}$ **（垂直条件，なす角）**

(1) $\overrightarrow{a} = (a_1,\ a_2,\ a_3),\ \overrightarrow{b} = (b_1,\ b_2,\ b_3)$ のとき

$$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

であることを示せ。

(2) $\overrightarrow{p} = (0,\ -1,\ 1)$ と $\overrightarrow{q} = (6,\ -3,\ c)$ が垂直となるような c の値を求めよ。

(3) $\overrightarrow{u} = (0,\ -1,\ 1)$ と $\overrightarrow{v} = (6,\ -3,\ 6)$ のなす角を求めよ。

$\boxed{7}$ **（1次独立，斜交座標）**

三角形 OAB において $\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \overrightarrow{b}$ とするとき，

(1) $\alpha \overrightarrow{a} + \beta \overrightarrow{b} = \overrightarrow{0} \Longrightarrow \alpha = \beta = 0$ が成り立つことを示せ。

(2) 実数 s, t が次の条件を満たしながら変化するとき，$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = s\overrightarrow{a} + t\overrightarrow{b}$ と表される点 P が存在する範囲をそれぞれ求めよ。

(i) $3s + 2t = 4$

(ii) $s + t = 1$, $1 \leqq s \leqq 2$

(iii) $s \geqq 0$, $t \geqq 0$, $s + t \leqq 1$

(iv) $2s + t \geqq 2$, $s + t \leqq 2$, $t \geqq 0$

$\boxed{8}$ **（共線条件）**

三角形 ABC において辺 AB を 3 : 1 に内分する点を D，辺 AC を 4 : 1 に内分する点を E とし，BE と CD の交点を P とする。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ の 1 次結合で表せ。

(2) 直線 AP と辺 BC の交点を Q とするとき，BQ : QC を求めよ。

$\boxed{9}$ **(共面条件)**

四面体 OABC において，$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \overrightarrow{c}$ とする。線分 OA を 2 : 1 に内分する点を P，線分 PB を 2 : 1 に内分する点を Q，線分 QC を 2 : 1 に内分する点を R，直線 OR と三角形 ABC との交点を S とする。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ を $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ を用いて表せ。

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OS}}$ を $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ を用いて表せ。

$\boxed{10}$ **(正射影，対称点)**

(1) $\overrightarrow{x}$ の $\overrightarrow{a}\,(\neq \overrightarrow{0})$ に平行な直線への正射影 $\overrightarrow{p}$ を求めよ。

(2) 平面上に三角形 OAB があり，直線 OA に関する点 B の対称点を C とする。
$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \overrightarrow{c}$ とおくとき，$\overrightarrow{c}$ を $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ で表せ。

$\boxed{11}$ **（平面におろした垂線）**

3 点 A$(-1,\ 1,\ 4)$, B$(2,\ 0,\ 0)$, C$(0,\ 0,\ 2)$ を通る平面に，点 P$(1,\ 2,\ -3)$ からおろした垂線の足を H とする。

(1) 平面 ABC に垂直なベクトルをひとつ求めよ。

(2) 点 H の座標を求めよ。

$\boxed{12}$ **（空間の２直線）**

点 A$(-4,\ 1,\ 5)$ を通り，ベクトル $\overrightarrow{u}=(1,\ -2,\ 2)$ に平行な直線を l とし，点 B $(2,\ 14,\ 12)$ を通り，ベクトル $\overrightarrow{v}=(3,\ 4,\ -5)$ に平行な直線を m とする。

(1) l と m は共有点をもたないことを示せ。

(2) l と m の両方に直交する直線を n とするとき，l と n の交点 L および m と n の交点 M の座標を求めよ。

(3) l と m のなす角を求めよ。

$\boxed{13}$ **（分割表現）**

座標空間において，原点 $\mathrm{O}(0,\ 0,\ 0)$ を通りベクトル $\overrightarrow{u}=(1,\ 2,\ 2)$ に平行な直線を l とし，点 $\mathrm{A}(4,\ 5,\ 2)$ と直線 l を含む平面を π とする。

(1) 直線 l 上に 2 点 B，C をとり，$\triangle$ABC が正三角形となるとき，2 点 B，C の座標をそれぞれ求めよ。ただし，点 B の x 座標は点 C の x 座標より小さいものとする。

(2) 平面 π 上で，点 A を中心とし，直線 l と接する円を K とする。平面 π との交わりが円 K となる半径 5 の球面を S とするとき，球面 S の中心 Z の座標を求めよ。

$\boxed{14}$ **（円・球面のベクトル方程式）**

(1) 正三角形 ABC の外接円 K 上にある動点 P に対して，$\mathrm{PA}^2+\mathrm{PB}^2+\mathrm{PC}^2$ は一定であることを示し，その値を外接円 K の半径 r を用いて表せ。

(2) 正四面体 ABCD の外接球面の中心を Q とするとき，

$$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}+\overrightarrow{\mathrm{AD}}\right)$$

が成り立つことを示せ。

$\boxed{1}$ **確認**：**ベクトル**とは「向きと大きさをあわせ持ち，向きと大きささえ同じであれば同一視される量」のことである。例えば，「秒速 10 m の南向きの風」や向きと速さをあわせた「速度」はベクトルの典型的な例である。「ベクトル」は，座標などにとらわれず処理ができることに大きな意義があり，数学全般の理解を支えている。

ベクトルには**和，差，実数倍の演算が定義できる**。図 1 のように，終点と始点を継いで短絡させたベクトルを和(の結果)と定義する。始点と終点を表示すると

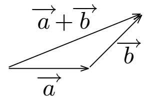


図 1

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

となり，**数式だけで機械的に処理できる**ことがわかる。
また，ベクトルは向きと大きさが同じであれば同じベクトルとなるので，2 つのベクトルを隣接辺とする平行四辺形の対角線のベクトルが和になるとも考えられる(図 2)。

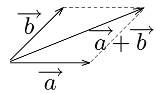


図 2

ベクトルの差は，ふつうの数式と同様に和の逆算として定義される。図をかいてイメージをしっかりとたたき込んでおこう(図 3)。
上記の式より

$$\mathbf{\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}}$$

と表されることは重要である。見方を変えると

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{AO}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

と見ることができて，ここで登場する

$$\overrightarrow{\mathrm{AO}}=-\overrightarrow{a}=-\overrightarrow{\mathrm{OA}}$$

を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\overrightarrow{a}$ の**逆ベクトル**という。

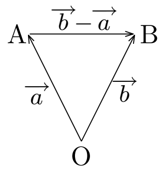
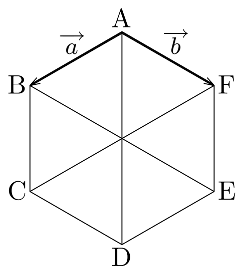


図 3

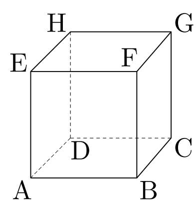
解答：

(1) 正六角形 ABCDEF の図を参考にして



$$\overrightarrow{\mathrm{AE}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BE}}=\overrightarrow{a}+2\overrightarrow{b}\quad\text{(答)}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{BF}}=\overrightarrow{\mathrm{AF}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{b}-\overrightarrow{a}\quad\text{(答)}$$
$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\overrightarrow{\mathrm{AE}}+\overrightarrow{\mathrm{ED}}&=(\overrightarrow{a}+2\overrightarrow{b})+\overrightarrow{a}\\&=2\overrightarrow{a}+2\overrightarrow{b}\quad\text{(答)}\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{FD}}=\overrightarrow{\mathrm{AD}}-\overrightarrow{\mathrm{AF}}&=(2\overrightarrow{a}+2\overrightarrow{b})-\overrightarrow{b}\\&=2\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}\quad\text{(答)}\end{aligned}$$

(2) 立方体 ABCD − EFGH の図を参考にして



$$\overrightarrow{\mathrm{AG}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BC}}+\overrightarrow{\mathrm{CG}}=\overrightarrow{b}+\overrightarrow{d}+\overrightarrow{e}\quad\text{(答)}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{FH}}=\overrightarrow{\mathrm{BD}}=\overrightarrow{\mathrm{AD}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{d}-\overrightarrow{b}\quad\text{(答)}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{CE}}=\overrightarrow{\mathrm{CD}}+\overrightarrow{\mathrm{DA}}+\overrightarrow{\mathrm{AE}}=-\overrightarrow{b}-\overrightarrow{d}+\overrightarrow{e}\quad\text{(答)}$$

$\boxed{2}$ **確認**：ベクトル $\overrightarrow{a}$ の始点を 0，終点を 1 とする数直線において，0 を始点，m(実数)を終点とするベクトルを $m\overrightarrow{a}$ と定める。特に $m>0$ のときは，長さを m 倍するというイメージと合致する。

ベクトルは向きと大きさだけで定義され，位置にはよらないから，**実数倍により平行条件を表す**ことができる。すなわち，

$$\overrightarrow{a}\neq\overrightarrow{0},\ \overrightarrow{b}\neq\overrightarrow{0}\ \text{のとき}\ \ \overrightarrow{a}\parallel\overrightarrow{b}\iff\overrightarrow{b}=k\overrightarrow{a}\ \ ({}^{\exists}k\neq 0)$$

解答：

M は辺 AB の中点，N は辺 AC の中点であるから，

$$\overrightarrow{\mathrm{AM}}=\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}},\quad \overrightarrow{\mathrm{AN}}=\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

である。したがって，

$$\overrightarrow{\mathrm{MN}}=\overrightarrow{\mathrm{AN}}-\overrightarrow{\mathrm{AM}}=\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{BC}}$$

となり，これは

$$\mathrm{MN}\parallel\mathrm{BC},\quad 2\,\mathrm{MN}=\mathrm{BC}$$

であることを意味する。

(おわり)

$\boxed{3}$ **確認**：平面上または空間内において，1 点 O を固定して，任意の点 P の位置を

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{p}$$

により定めるとき，$\overrightarrow{p}$ を点 O に関する点 P の**位置ベクトル**といい，$\mathrm{P}(\overrightarrow{p})$ と表す。

$\boxed{1}$ の確認で述べたように

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}} = \overrightarrow{\mathrm{O'B}} - \overrightarrow{\mathrm{O'A}}$$

となるから，2 点 A, B の位置ベクトルをそれぞれ $\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$ とするとき，始点を O と O′ のいずれにとった場合でも

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{b} - \overrightarrow{a}$$

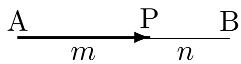
と表されることになる。さらに，直線 AB 上の任意の点に対しても $\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$ による**表示は始点のとり方によらない**。この「始点のとり方によらない」ことが，「位置が定められる」ということの意味である。位置ベクトルを表示するには，直線上では 2 個，平面上では 3 個，空間内では 4 個の基準となる点が必要となるが，その基準点となり得る点の配置の状態を**一般の位置にある**という。あとから出てくる「1 次独立なベクトル」と混同しないように注意すること。

位置ベクトルの概念にさえ注意すれば，具体的な係数の決定は $\boxed{1}$，$\boxed{2}$ の計算と同様に行なえばよい。ここで得られた結果は，最後の(注)を含めて覚えておくように。

解答：

(1) 点 P は線分 AB 上にあって，$\mathrm{AP} : \mathrm{PB} = m : n$ であるから，

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \frac{m}{m+n}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$$



位置ベクトルで表して

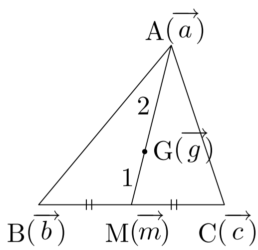
$$\overrightarrow{p} - \overrightarrow{a} = \frac{m}{m+n}(\overrightarrow{b} - \overrightarrow{a})$$

$$\therefore \quad \overrightarrow{p} = \overrightarrow{a} + \frac{m}{m+n}(\overrightarrow{b} - \overrightarrow{a}) = \frac{n\overrightarrow{a} + m\overrightarrow{b}}{m+n}$$

(おわり)

(2) 辺 BC の中点を $\mathrm{M}(\overrightarrow{m})$ とすると，

$$\overrightarrow{m} = \frac{\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}}{2}$$

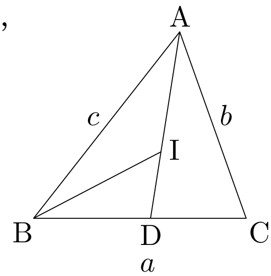


△ABC の重心 G は AM を 2 : 1 に内分するから，

$$\overrightarrow{g} = \frac{\overrightarrow{a} + 2\overrightarrow{m}}{2+1}$$

$$= \frac{\overrightarrow{a} + 2\,\dfrac{\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}}{2}}{2+1} = \frac{\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}}{3} \quad (答)$$

(3) $\angle$BAC の二等分線と辺 BC の交点を D ($\overrightarrow{d}$) とすると，
角の二等分線の性質より



$$\mathrm{BD}:\mathrm{DC}=\mathrm{AB}:\mathrm{AC}=c:b$$

であるから，内分点の公式((1)の結果)より

$$\overrightarrow{d}=\frac{b\overrightarrow{b}+c\overrightarrow{c}}{c+b}$$

BI は$\angle$ABD の二等分線であるから，

$$\mathrm{AI}:\mathrm{ID}=\mathrm{AB}:\mathrm{BD}=c:\frac{c}{c+b}a=(b+c):a$$

内分点の公式より

$$\begin{aligned}\overrightarrow{i}&=\frac{a\overrightarrow{a}+(b+c)\overrightarrow{d}}{(b+c)+a}\\&=\frac{a\overrightarrow{a}+(b+c)\dfrac{b\overrightarrow{b}+c\overrightarrow{c}}{b+c}}{(b+c)+a}\\&=\frac{a\overrightarrow{a}+b\overrightarrow{b}+c\overrightarrow{c}}{a+b+c}\quad(答)\end{aligned}$$

(注) $m,\ n$ が異なる正の数のとき，AB を $m:n$ に外分する点 Q は

$m<n$ (Q が A の側)のとき $\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=-\dfrac{m}{n-m}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$

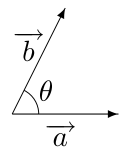
$m>n$ (Q が B の側)のとき $\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\dfrac{m}{m-n}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$

を満たし(図を描いて確かめよ！)，いずれの場合も

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{m}{m-n}(\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}})=\frac{-n\overrightarrow{\mathrm{OA}}+m\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{m-n}$$

である。

$\boxed{4}$ **確認**：ベクトルを平行移動させて，2つのベクトルの始点が一致するときに測った角度を**ベクトルのなす角**という。



$\overrightarrow{a} \neq \overrightarrow{0}$，$\overrightarrow{b} \neq \overrightarrow{0}$，$\overrightarrow{a}$と$\overrightarrow{b}$のなす角を$\theta$とするとき，

$$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b} = |\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|\cos\theta$$

によって定まる実数値を$\overrightarrow{a}$と$\overrightarrow{b}$の**内積**という。また，

$$\overrightarrow{a} = \overrightarrow{0} \text{ または } \overrightarrow{b} = \overrightarrow{0} \text{ のとき } \overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b} = 0$$

と定める。数学的には，下の**4つの法則を満たすシステムを内積の定義とする**のが一般的であるが，高校数学では上記のような奇妙な解釈を内積の出発点としているため，内積の深い意味を理解しようとして挫折する人が多い。学習上は，「内積がどのような場面で威力を発揮するのか」という**実用面からマスターする方が効果的**である。

内積の定義から，4つの法則

$$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{a} = |\overrightarrow{a}|^2 \quad \left(\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{a} \geqq 0,\quad \overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{a} = 0 \iff \overrightarrow{a} = \overrightarrow{0}\right)$$

$$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b} = \overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{a} \quad \text{(交換法則)}$$

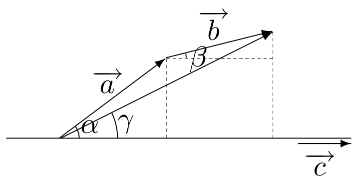
$$k(\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}) = (k\overrightarrow{a})\cdot\overrightarrow{b} = \overrightarrow{a}\cdot(k\overrightarrow{b}) \quad \text{(実数倍についての結合法則)}$$

$$\left(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}\right)\cdot\overrightarrow{c} = \overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{c} + \overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{c} \quad \text{(分配法則)}$$

が成り立つが，一度は確かめてほしい。分配法則については，$\overrightarrow{c}$と$\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$，$\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}$とのなす角をそれぞれ$\alpha$，$\beta$，$\gamma$とするとき，図形的に

$$|\overrightarrow{a}|\cos\alpha + |\overrightarrow{b}|\cos\beta = |\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}|\cos\gamma$$

が成り立つことから言える。

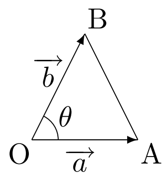


この演算法則は**通常の数式と同様の演算法則**なので，積の展開や平方完成などの式変形が可能となり，大きな威力を発揮する。というよりむしろ，**通常の数式と同じ感覚で抵抗なく使えるアイテムとして内積を**(4つの法則で)**定義**したというのが，本来の姿である。したがって，実用面のマスター(問題演習)を優先させることが，本質的な理解に直結しているといえる。

最後に，三角形の面積の確認。

$\angle\mathrm{AOB} = \theta$とおくとき，三角形OABの面積$S$は

$$\begin{aligned}
S &= \frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OB}}|\sin\theta \\
&= \frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OB}}|\sqrt{1-\cos^2\theta} \\
&= \frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OB}}|\sqrt{1-\left(\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OB}}|}\right)^2} \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2 - (\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}})^2}
\end{aligned}$$



解答：

(1) 仮定より

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right| = 1$$
$$\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|^2 + 2\,\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}} + \left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|^2 = 1$$
$$4\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|^2 + 4\,\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}} + \left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|^2 = 1$$

であるから，これを連立方程式として解くと

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}} = -\frac{3}{2},\quad \left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right| = \sqrt{3} \quad \text{(答)}$$

(2) 三角形の面積公式より

$$S = \frac{1}{2}\sqrt{\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|^2\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|^2 - \left(\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)^2}$$

(1)の結果を代入して

$$S = \frac{1}{2}\sqrt{1\times 3 - \left(-\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{4} \quad \text{(答)}$$

(3) (1)で求めた数値を用いて，

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|^2 = \left|\overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|^2 = \left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|^2 - 2\,\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}} + \left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|^2 = 7$$

より

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right| = \sqrt{7}$$

(2)の結果とあわせて，△OAB の面積 S を 2 通りに表すと

$$S = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{OH}}\right| = \frac{\sqrt{3}}{4}$$
$$\therefore\ \left|\overrightarrow{\mathrm{OH}}\right| = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{21}}{14} \quad \text{(答)}$$

$\boxed{5}$ **確認**：座標平面または座標空間において，ベクトルの始点を原点にとるときの終点の座標をベクトルの**成分**という。したがって，ベクトルの相等条件や大きさは座標の性質に従うことになる。

$$(a_1,\ a_2,\ a_3) = (b_1,\ b_2,\ b_3) \iff a_1 = b_1 \text{ かつ } a_2 = b_2 \text{ かつ } a_3 = b_3$$

$$\overrightarrow{v} = (x,\ y,\ z) \text{ のとき } \left|\overrightarrow{v}\right| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

ベクトルの演算は各成分ごとに行なわれることになる。

$$(a_1,\ a_2,\ a_3) + (b_1,\ b_2,\ b_3) = (a_1 + b_1,\ a_2 + b_2,\ a_3 + b_3)$$

$$k(a_1,\ a_2,\ a_3) = (ka_1,\ ka_2,\ ka_3)$$

複数のベクトル $\overrightarrow{a},\ \overrightarrow{b},\ \overrightarrow{c},\ \cdots$ の実数倍の和で表されるベクトル

$$\alpha\overrightarrow{a} + \beta\overrightarrow{b} + \gamma\overrightarrow{c} + \cdots$$

を $\overrightarrow{a},\ \overrightarrow{b},\ \overrightarrow{c},\ \cdots$ の**1 次結合(線型結合)**という。

解答：

(1) $\overrightarrow{c} = p\overrightarrow{a} + q\overrightarrow{b}$ より

$$(7,\ 2) = p(1,\ 2) + q(1,\ -1)$$

成分を比べて

$$\begin{cases} p + q = 7 \\ 2p - q = 2 \end{cases}$$

$$\therefore\ \ p = 3,\ \ q = 4$$

よって，求める 1 次結合は

$$\overrightarrow{c} = 3\overrightarrow{a} + 4\overrightarrow{b} \quad \text{(答)}$$

(2) ベクトル

$$k\overrightarrow{c} - \overrightarrow{b} = k(7,\ 2) - (1,\ -1) = (7k - 1,\ 2k + 1)$$

は $\overrightarrow{a} = (1,\ 2)$ と平行であるから，

$$(7k - 1) : (2k + 1) = 1 : 2$$

$$2(7k - 1) = 2k + 1$$

$$\therefore\ \ k = \frac{1}{4} \quad \text{(答)}$$

$\boxed{6}$ **確認**：$\boxed{4}$ で内積の計算法則は既に確認したが，特に

$$\left|\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}\right|^2=\left|\overrightarrow{a}\right|^2-2\,\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}+\left|\overrightarrow{b}\right|^2$$

を計算することにより，内積の成分表示が得られる。ちなみに，この等式は $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{b}$ である $\triangle\mathrm{OAB}$ における余弦定理を表している。

内積の定義式に戻ると，$\overrightarrow{a}\neq\overrightarrow{0}$，$\overrightarrow{b}\neq\overrightarrow{0}$ のとき

$$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}}{\left|\overrightarrow{a}\right|\left|\overrightarrow{b}\right|}\quad(\theta \text{ は } \overrightarrow{a} \text{ と } \overrightarrow{b} \text{ のなす角})$$

と表されるから，**ベクトルのなす角や垂直条件を求めるのに利用できる**。さらに，直線や平面のなす角，垂直条件が求められる。

解答：

(1) $\left|\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}\right|^2=\left|\overrightarrow{a}\right|^2-2\,\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}+\left|\overrightarrow{b}\right|^2$ より

$$(a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2+(a_3-b_3)^2=a_1{}^2+a_2{}^2+a_3{}^2-2\,\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}+b_1{}^2+b_2{}^2+b_3{}^2$$

であるから，

$$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$$

（おわり）

(2) “$\overrightarrow{p}$ と $\overrightarrow{q}$ が垂直” $\iff \overrightarrow{p}\cdot\overrightarrow{q}=0\times6-1\times(-3)+1\times c=3+c=0$

$\iff c=-3$　(答)

(3) $\overrightarrow{u}$ と $\overrightarrow{v}$ のなす角を θ とすると，

$$\begin{aligned}\cos\theta&=\frac{\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}}{\left|\overrightarrow{u}\right|\left|\overrightarrow{v}\right|}\\&=\frac{0\times6-1\times(-3)+1\times6}{\sqrt{0+1+1}\sqrt{36+9+36}}\\&=\frac{1}{\sqrt{2}}\end{aligned}$$

$0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ$ より

なす角 θ は 45°　(答)

$\boxed{7}$ **確認**：われわれがふだん座標と呼んでいるものは**直交座標**のことで，座標平面上のときは2つのベクトル(1, 0), (0, 1)で，座標空間のときは3つのベクトル(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)で表したときの係数の組を単に座標と呼んでいる。

この基本ベクトルを一般化したものが1次独立なベクトルであるから，正方形や立方体を基準に座標設定していたものを，一般の平行四辺形や平行六面体を基準にした座標(**斜交座標**)を考えていると思えばよい。

n 個の実数 $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_n$ およびベクトル $\overrightarrow{a_1},\ \overrightarrow{a_2},\ \cdots,\ \overrightarrow{a_n}$ に対して

$$\alpha_1\overrightarrow{a_1}+\alpha_2\overrightarrow{a_2}+\cdots+\alpha_n\overrightarrow{a_n}=\overrightarrow{0} \implies \alpha_1=\alpha_2=\cdots=\alpha_n=0$$

が成り立つとき，$\overrightarrow{a_1},\ \overrightarrow{a_2},\ \cdots,\ \overrightarrow{a_n}$ は**1次独立(線型独立)**であるという。

1次独立なベクトルの個数をその空間の**次元**という。高校の範囲では，2次元と3次元しか扱わないので，1次独立の概念を図形的にとらえることも重視され，

$$\begin{aligned}
&\text{“}\ \overrightarrow{a},\ \overrightarrow{b}\ \text{が1次独立”}\\
&\iff \text{“}\ \alpha\overrightarrow{a}+\beta\overrightarrow{b}=\overrightarrow{0}\ \text{ならば}\ \alpha=\beta=0\ \text{”}\ \text{(定義)}\\
&\iff \overrightarrow{a}\neq\overrightarrow{0}\ \text{かつ}\ \overrightarrow{b}\neq\overrightarrow{0}\ \text{かつ}\ \overrightarrow{a}\not\parallel\overrightarrow{b}\\
&\iff \text{“}\ \overrightarrow{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}},\ \overrightarrow{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}\ \text{を満たす}\ \triangle\mathrm{OAB}\ \text{が存在”}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\text{“}\ \overrightarrow{a},\ \overrightarrow{b},\ \overrightarrow{c}\ \text{が1次独立”}\\
&\iff \text{“}\ \alpha\overrightarrow{a}+\beta\overrightarrow{b}+\gamma\overrightarrow{c}=\overrightarrow{0}\ \text{ならば}\ \alpha=\beta=\gamma=0\ \text{”}\ \text{(定義)}\\
&\iff \text{“}\ \overrightarrow{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}},\ \overrightarrow{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}},\ \overrightarrow{c}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}\ \text{を満たす四面体OABCが存在”}
\end{aligned}$$

のように図形的考察の中で係数の一意性を導くのに用いられる。

点の(相対的な)位置，長さや面積の比は直交座標から斜交座標に移行してもそのまま保存されるので，(2)のような図形は，慣れている st 平面(直交座標)上で図示して考えることができる。このように，相対的な形や比を保存する性質を**線型性**という。これは，のちに学ぶ**1次変換(線型変換)**を予言している。

解答：

(1) $\alpha\overrightarrow{a}+\beta\overrightarrow{b}=\overrightarrow{0}$ のとき $\alpha\neq0$ とすれば，

$$\overrightarrow{a}=-\frac{\beta}{\alpha}\overrightarrow{b}$$

より OA∥OB となって，三角形OABの存在に反する。よって，

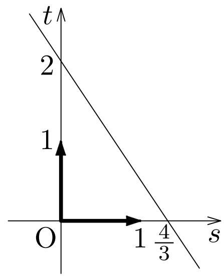
$$\alpha=0$$

このとき $\beta\overrightarrow{b}=\overrightarrow{0}$，$\overrightarrow{b}\neq\overrightarrow{0}$ であるから

$$\beta=0$$

(おわり)

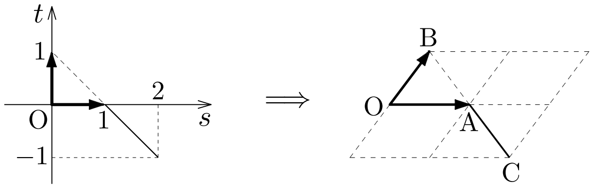
(2) (i) $3s+2t=4 \iff \dfrac{s}{\left(\dfrac{4}{3}\right)}+\dfrac{t}{2}=1$



これを st 平面上に図示すると右図のようになるから，
点 P の存在範囲は

OA を 4 : 1 に外分する点と
OB を 2 : 1 に外分する点を通る直線　(答)

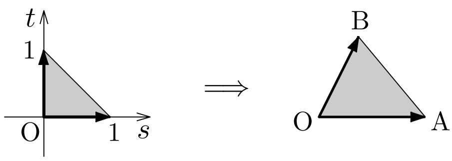
(ii) $s+t=1$，$1 \leqq s \leqq 2$ を st 平面上に図示すると下左図のようになるから，



点 P の存在範囲は上右図のようになり，

AB を 1 : 2 に外分する点を C とするときの線分 AC　(答)

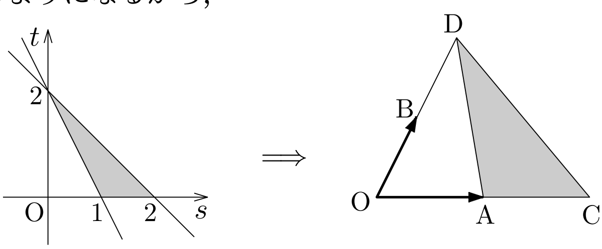
(iii) $s \geqq 0$，$t \geqq 0$，$s+t \leqq 1$ を st 平面上に図示すると，下左図の網目部分(境界を含む)のようになるから，



点 P の存在範囲は上右図の網目部分(境界を含む)のようになり，

△OAB の周および内部　(答)

(iv) $s+\dfrac{t}{2} \geqq 1$，$s+t \leqq 2$，$t \geqq 0$ を st 平面上に図示すると，下左図の網目部分(境界を含む)のようになるから，



点 P の存在範囲は上右図の網目部分(境界を含む)のようになり，

OA，OB を 2 : 1 に外分する点をそれぞれ C，D とするとき
△ACD の周および内部　(答)

$\boxed{8}$ **確認**：図形を式で表現するとき，2 つの図形が共有点をもつことは直接には表せない。そこで，2 つの図形の両方の上にある点として求めるために，「図形上にある条件」と「連立条件から結果を導く方法」の 2 つが重要となる。前者については，本問で共線条件(直線上にあるための条件)，$\boxed{9}$ で共面条件(平面上にあるための条件)を確認する。後者については，既に $\boxed{7}$ で 1 次独立の概念を確認した。

点 P が直線 AB 上にある条件として**共線条件**を整理すると，

$$\text{「点 P が直線 AB 上にある」} \iff \overrightarrow{\mathrm{AP}} = t\,\overrightarrow{\mathrm{AB}} \quad (t\text{ は実数})$$
$$\iff \overrightarrow{\mathrm{OP}} = (1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\,\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$
$$\iff \overrightarrow{\mathrm{OP}} = s\,\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\,\overrightarrow{\mathrm{OB}} \text{ のとき } s+t=1$$

上の 3 条件は教科書では別々に扱うが，実用上は 1 つの条件として適用される。また，下の解答のように，状況に応じて使い分けられるようにしておきたい。

解答：

(1) 点 P は直線 BE 上の点であるから，

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = (1-s)\overrightarrow{\mathrm{AB}} + s\,\overrightarrow{\mathrm{AE}} = (1-s)\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{4}{5}s\,\overrightarrow{\mathrm{AC}} \qquad \cdots\cdots ①$$

と表される。また，点 P は直線 CD 上の点でもあるから，

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = (1-t)\overrightarrow{\mathrm{AC}} + t\,\overrightarrow{\mathrm{AD}} = \frac{3}{4}t\,\overrightarrow{\mathrm{AB}} + (1-t)\overrightarrow{\mathrm{AC}} \qquad \cdots\cdots ②$$

と表される。

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ は 1 次独立であるから，①かつ②より

$$1-s = \frac{3}{4}t \quad \text{かつ} \quad \frac{4}{5}s = 1-t$$

$$\therefore \quad s = \frac{5}{8},\quad t = \frac{1}{2}$$

①または②に代入して，求めるベクトルは

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \frac{3}{8}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AC}} \quad \text{(答)}$$

(2) 点 Q は直線 AP 上にあるから，

$$\overrightarrow{\mathrm{AQ}} = k\,\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \frac{3}{8}k\,\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{1}{2}k\,\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

と表される。点 Q は辺 BC 上の点でもあるから，

$$\frac{3}{8}k + \frac{1}{2}k = 1 \qquad \therefore \quad k = \frac{8}{7}$$

$$\therefore \quad \overrightarrow{\mathrm{AQ}} = \frac{3}{7}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{4}{7}\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \frac{3\overrightarrow{\mathrm{AB}} + 4\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{4+3}$$

よって，内分点の公式より

$$\mathrm{BQ} : \mathrm{QC} = 4 : 3 \quad \text{(答)}$$

$\boxed{9}$ **確認**：$\boxed{7}$で確認したように，平面における1次独立なベクトルは$(1,\ 0)$，$(0,\ 1)$を一般化したものであるから，平面上の任意のベクトル$\overrightarrow{p}$は，平面上の1次独立なベクトル$\overrightarrow{u}$，$\overrightarrow{v}$の1次結合として

$$\overrightarrow{p} = s\overrightarrow{u} + t\overrightarrow{v} \quad (s,\ t \text{ は実数})$$

と表される。したがって，これが平面のベクトル方程式だと解釈できる。

共面条件(平面上にあるための条件)をまとめると，

「点Pが平面ABC上にある」

$$\begin{aligned}
&\iff \overrightarrow{\mathrm{AP}} = s\overrightarrow{\mathrm{AB}} + t\overrightarrow{\mathrm{AC}} \quad (s,\ t \text{ は実数})\\
&\iff \overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + s\overrightarrow{\mathrm{AB}} + t\overrightarrow{\mathrm{AC}}\\
&\iff \overrightarrow{\mathrm{OP}} = \alpha\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \beta\overrightarrow{\mathrm{OB}} + \gamma\overrightarrow{\mathrm{OC}} \text{ のとき } \alpha + \beta + \gamma = 1
\end{aligned}$$

ただし，平面ABCというときには，A，B，Cは一般の位置にある($\overrightarrow{\mathrm{AB}}$と$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$は1次独立)とする。

解答：

(1) 仮定および分点公式より

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \frac{2}{3}\overrightarrow{a}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{OP}} + 2\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{2+1} = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\overrightarrow{a}\right) + \frac{2}{3}\overrightarrow{b} = \frac{2}{9}\overrightarrow{a} + \frac{2}{3}\overrightarrow{b}$$

$$\begin{aligned}
\therefore\ \overrightarrow{\mathrm{OR}} &= \frac{\overrightarrow{\mathrm{OQ}} + 2\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{2+1}\\
&= \frac{1}{3}\left(\frac{2}{9}\overrightarrow{a} + \frac{2}{3}\overrightarrow{b}\right) + \frac{2}{3}\overrightarrow{c}\\
&= \frac{2}{27}\overrightarrow{a} + \frac{2}{9}\overrightarrow{b} + \frac{2}{3}\overrightarrow{c} \quad \text{(答)}
\end{aligned}$$

(2) 点Sは直線OR上にあるから

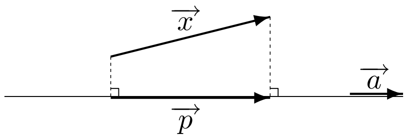
$$\overrightarrow{\mathrm{OS}} = k\overrightarrow{\mathrm{OR}} = \frac{2}{27}k\overrightarrow{a} + \frac{2}{9}k\overrightarrow{b} + \frac{2}{3}k\overrightarrow{c} \quad (k \text{ は実数})$$

と表される。Sは平面ABC上の点でもあるから

$$\frac{2}{27}k + \frac{2}{9}k + \frac{2}{3}k = 1 \qquad \therefore\ k = \frac{27}{26}$$

$$\therefore\ \overrightarrow{\mathrm{OS}} = \frac{1}{13}\overrightarrow{a} + \frac{3}{13}\overrightarrow{b} + \frac{9}{13}\overrightarrow{c} \quad \text{(答)}$$

$\boxed{10}$ **確認**：図形 F の図形 S への**正射影**とは，図形 F 上の点Pから図形 S におろした垂線の足をQとするとき，点Pが図形 F をくまなく動くときの点Qのえがく図形のことであり，直感的にはスクリーンに垂直な平行光線による影のことである。



垂線の足(を表すベクトル)を求める解法は，垂直方向のベクトル(法線ベクトル)がわかる場合とわからない場合とで異なってくる。

本問では，垂直方向のベクトルがわからないので，まず直線(または平面)上にあるための条件を文字でおいて式に表し，(内積)$=0$ に持ち込むという流れとなる。解法を覚えると同時に，(1) の結果も公式として覚えておきたい。

法線ベクトル(垂直方向のベクトル)が与えられている場合は，直交する2つの図形の交点を求める問題として $\boxed{8}$ と同じ解法となる。平面の法線ベクトルを求めた上で垂線の足を求める解法は，$\boxed{11}$ で確認する。

解答：

(1) $\overrightarrow{p}$ は $\overrightarrow{a}$ に平行であるから，

$$\overrightarrow{p}=k\overrightarrow{a}\quad (k\text{ は実数})$$

と表される。

$$\overrightarrow{x}-\overrightarrow{p}=\overrightarrow{x}-k\overrightarrow{a}$$

は $\overrightarrow{a}$ と垂直であるから，

$$(\overrightarrow{x}-k\overrightarrow{a})\cdot\overrightarrow{a}=0$$

$$\overrightarrow{x}\cdot\overrightarrow{a}-k|\overrightarrow{a}|^2=0 \qquad \therefore\ k=\frac{\overrightarrow{x}\cdot\overrightarrow{a}}{|\overrightarrow{a}|^2}$$

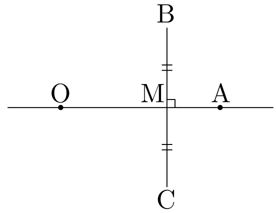
よって，求めるベクトルは

$$\overrightarrow{p}=\frac{\overrightarrow{x}\cdot\overrightarrow{a}}{|\overrightarrow{a}|^2}\overrightarrow{a}\quad\text{(答)}$$

(2) BCの中点をMとすると，$\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ は $\overrightarrow{b}$ の直線OAへの正射影であるから，

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\frac{\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c}}{2}=\frac{\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{a}|^2}\overrightarrow{a}$$

$$\therefore\ \overrightarrow{c}=\frac{2\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{a}|^2}\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}\quad\text{(答)}$$



$\boxed{11}$ **確認**：点 $\mathrm{A}(\overrightarrow{a})$ を通る平面 π 上の任意の点 $\mathrm{P}(\overrightarrow{p})$ が，1 次独立なベクトル $\overrightarrow{u}$，$\overrightarrow{v}$ を用いて

$$\pi:\ \overrightarrow{p} = \overrightarrow{a} + s\overrightarrow{u} + t\overrightarrow{v} \quad (s,\ t \text{ は実数})$$

と表されるとき，平面 π は(点 A を通り) **$\overrightarrow{u}$，$\overrightarrow{v}$ で張られる平面**という。

$\overrightarrow{u}$，$\overrightarrow{v}$ で張られる平面 π について

「ベクトル $\overrightarrow{n}\ (\neq \overrightarrow{0})$ が平面 π に垂直」

$\Longleftrightarrow$「ベクトル $\overrightarrow{n}$ は平面 π 上のすべての直線(ベクトル)と垂直」(定義)

$\Longleftrightarrow$ 任意の実数 s，t に対して $\overrightarrow{n}\cdot(s\overrightarrow{u} + t\overrightarrow{v}) = 0$

$\Longleftrightarrow$ $\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{u} = 0$ かつ $\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{v} = 0$

ここでも，1 次独立なベクトルに注目することがポイントである。連立方程式を解く際の比例式の処理も十分練習しておこう。

解答：

(1) 平面 ABC は

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (3,\ -1,\ -4),\quad \overrightarrow{\mathrm{AC}} = (1,\ -1,\ -2)$$

で張られる平面である。求める法線ベクトルを $\overrightarrow{v} = (a,\ b,\ c)$ とおくと，

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{v} = 3a - b - 4c = 0 \quad \cdots\cdots ①$$

$$\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{v} = a - b - 2c = 0 \quad \cdots\cdots ②$$

① − ② × 2 より $a + b = 0$，① − ②より $2a - 2c = 0$ であるから，

$$\therefore\ a = \frac{b}{-1} = c$$

よって，平面 ABC に垂直なベクトルをひとつ求めると

$$\overrightarrow{v} = (1,\ -1,\ 1) \quad (\text{答})$$

(2) 垂線の足 H は，点 $\mathrm{P}(1,\ 2,\ -3)$ を通り $\overrightarrow{v}$ に平行な直線上にあるから，

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \overrightarrow{\mathrm{OP}} + t\overrightarrow{v} = (1+t,\ 2-t,\ -3+t) \quad (t \text{ は実数})$$

と表される。点 H は平面 ABC 上の点でもあるから

$$\overrightarrow{\mathrm{AH}} = \overrightarrow{\mathrm{OH}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}} = (t+2,\ -t+1,\ t-7)$$

は $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ の 1 次結合で表され，$\overrightarrow{v}$ と垂直であるから

$$\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AH}} = (t+2) - (-t+1) + (t-7) = 0 \qquad \therefore\ t = 2$$

よって，点 H の座標は

$$\mathrm{H}(3,\ 0,\ -1) \quad (\text{答})$$

(注) 上の解答では，平面と直線の交点として点 H の座標を求めたが，$\overrightarrow{\mathrm{PA}}$ の直線 PH への正射影 ($\to \boxed{10}$) が $\overrightarrow{\mathrm{PH}}$ であることに注目して，

$$\overrightarrow{\mathrm{PH}} = \frac{\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PA}}}{|\overrightarrow{v}|^2}\overrightarrow{v}$$

として求めることもできる。

$\boxed{12}$ **確認**：空間の直線を考える際には，(ベクトル方程式による)**パラメタ表示を用いて 1 変数で処理する**ことがポイントである。共有点をもたないことを示すには，共有点をもつための条件式(連立方程式)が実数解をもたないことを示せばよい。

2 直線に直交する直線を求めるには，$\boxed{10}$ と同様の手順で，

l 上の点 L と m 上の点 M を文字で置いてから，$\overrightarrow{\mathrm{LM}} \perp l$，$\overrightarrow{\mathrm{LM}} \perp m$

と考える。それは，垂直条件より(空間において)交わる条件の方が厳しいからである。

2 直線 l，m のなす角を θ，$\overrightarrow{u}$ と $\overrightarrow{v}$ のなす角を φ とすると

$0^\circ \leqq \varphi \leqq 90^\circ$ のとき $\theta = \varphi$，$90^\circ \leqq \varphi \leqq 180^\circ$ のとき $\theta = 180^\circ - \varphi$

であるから，内積を用いてまとめると

$$\cos\theta = \left|\cos\varphi\right| = \frac{\left|\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}\right|}{\left|\overrightarrow{u}\right|\left|\overrightarrow{v}\right|}$$

解答：

(1) l 上の点 P は

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{u} = (-4+t,\ 1-2t,\ 5+2t)\quad (t \text{ は実数})$$

と表され，m 上の点 Q は

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} + s\overrightarrow{v} = (2+3s,\ 14+4s,\ 12-5s)\quad (s \text{ は実数})$$

と表される。$\mathrm{P} = \mathrm{Q}$ となるための条件は

$$\begin{cases} -4+t = 2+3s & \cdots\cdots ① \\ 1-2t = 14+4s & \cdots\cdots ② \\ 5+2t = 12-5s & \cdots\cdots ③ \end{cases}$$

①かつ②より $t = -\dfrac{3}{2}$，$s = -\dfrac{5}{2}$ であるが，これは③を満たさない。

よって，l と m は共有点をもたない。　(おわり)

(2) $\mathrm{L}(-4+t,\ 1-2t,\ 5+2t)$，$\mathrm{M}(2+3s,\ 14+4s,\ 12-5s)$ とおくことができて，

$$\overrightarrow{\mathrm{LM}} = (3s-t+6,\ 4s+2t+13,\ -5s-2t+7)$$

直線 LM は l にも m にも垂直であるから，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{LM}}\cdot\overrightarrow{u} &= (3s-t+6) - 2(4s+2t+13) + 2(-5s-2t+7) \\ &= -3(5s+3t+2) = 0 \\ \overrightarrow{\mathrm{LM}}\cdot\overrightarrow{v} &= 3(3s-t+6) + 4(4s+2t+13) - 5(-5s-2t+7) \\ &= 5(10s+3t+7) = 0\end{aligned}$$

これを連立方程式として解くと $t = 1$，$s = -1$ となるから，

$\mathrm{L}(-3,\ -1,\ 7)$，$\mathrm{M}(-1,\ 10,\ 17)$　(答)

(3) l と m のなす角を θ $(0^\circ \leqq \theta \leqq 90^\circ)$ とすると

$$\cos\theta = \frac{\left|\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}\right|}{\left|\overrightarrow{u}\right|\left|\overrightarrow{v}\right|} = \frac{\left|1\times3 - 2\times4 + 2\times(-5)\right|}{\sqrt{1+4+4}\sqrt{9+16+25}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

l と m のなす角は 45°　(答)

$\boxed{13}$ **確認**：ベクトルの演算は座標によらず機械的にできるので，いくつかの**ベクトルの和に分割して考える**ことを可能にする。こうした発想は，考察の負担を軽減したり，直接には図示できない図形をとらえるのに役立つ。本問でも，正三角形や球面を直接考えるのは大変だが，分割してひとつひとつのベクトルを求めるのは簡単である。

(1) BC の中点 M を直線 l 上の $\mathrm{AM}\perp l$ なる点として求めれば，

$$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{OM}}+\overrightarrow{\mathrm{MB}},\quad \overrightarrow{\mathrm{OC}}=\overrightarrow{\mathrm{OM}}+\overrightarrow{\mathrm{MC}}$$

により求められる。

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OZ}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AZ}}$ と分割して考える。$\overrightarrow{\mathrm{AZ}}$ は**向きと大きさに分けて求める**とよい。

解答：

(1) BC の中点を M とすると，M は l 上の点であるから $\mathrm{M}(t,\ 2t,\ 2t)$ と表され，

$$\overrightarrow{\mathrm{AM}}=\overrightarrow{\mathrm{OM}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(t-4,\ 2t-5,\ 2t-2)$$

は l と垂直であるから，

$$\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AM}}=(t-4)+2(2t-5)+2(2t-2)=9t-18=0$$

$$\therefore\ t=2,\ \mathrm{M}(2,\ 4,\ 4),\ \overrightarrow{\mathrm{AM}}=(-2,\ -1,\ 2)$$

$\mathrm{BM}=\mathrm{CM}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{AM}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}|\overrightarrow{u}|,\ \ x_{\mathrm{B}}<x_{\mathrm{M}}<x_{\mathrm{C}}$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{OM}}+\overrightarrow{\mathrm{MB}}=(2,\ 4,\ 4)-\frac{\sqrt{3}}{3}(1,\ 2,\ 2)$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\overrightarrow{\mathrm{OM}}+\overrightarrow{\mathrm{MC}}=(2,\ 4,\ 4)+\frac{\sqrt{3}}{3}(1,\ 2,\ 2)$$

となって，求める座標は

$$\left.\begin{array}{l}\mathrm{B}\left(2-\dfrac{\sqrt{3}}{3},\ 4-\dfrac{2\sqrt{3}}{3},\ 4-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right)\\[2ex] \mathrm{C}\left(2+\dfrac{\sqrt{3}}{3},\ 4+\dfrac{2\sqrt{3}}{3},\ 4+\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right)\end{array}\right\}\ (\text{答})$$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{AZ}}$ に平行なベクトルを $\overrightarrow{v}=(a,\ b,\ c)$ とおくと，$\overrightarrow{v}$ は平面 π に垂直であるから

$$\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=a+2b+2c=0\ \text{かつ}\ \overrightarrow{\mathrm{AM}}\cdot\overrightarrow{v}=-2a-b+2c=0$$

$$\therefore\ a:b:c=2:(-2):1\quad\left(\to \text{計算法は}\boxed{11}\right)$$

(円 K の半径) $=\left|\overrightarrow{\mathrm{AM}}\right|=3$，(球面 S の半径) $=5$，$\angle\mathrm{MAZ}=90^\circ$ であるから，三平方の定理より

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{AZ}}\right|=\sqrt{5^2-3^2}=4$$

$$\therefore\ \overrightarrow{\mathrm{AZ}}=\pm\frac{\left|\overrightarrow{\mathrm{AZ}}\right|}{\sqrt{2^2+(-2)^2+1^2}}(2,\ -2,\ 1)=\pm\frac{4}{3}(2,\ -2,\ 1)$$

$\overrightarrow{\mathrm{OZ}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AZ}}$ より，点 Z の座標は

$$\left(\frac{20}{3},\ \frac{7}{3},\ \frac{10}{3}\right)\ \text{または}\ \left(\frac{4}{3},\ \frac{23}{3},\ \frac{2}{3}\right)\quad(\text{答})$$

$\boxed{14}$ **確認**：平面上において定点(中心)から等距離にある点の集まりが円，空間において定点(中心)から等距離にある点の集まりが球面なので，ベクトル方程式はいずれも

$$\left|\overrightarrow{p}-\overrightarrow{a}\right|=r \quad (r\text{ は正の定数})$$

の形をしている。$\boxed{4}$ で確認したように，内積の計算法則は多項式と同様なので，平方の展開や平方完成(にあたる計算)も可能である。

解答：

(1)
$$\begin{aligned}\mathrm{PA}^2+\mathrm{PB}^2+\mathrm{PC}^2&=\left|\overrightarrow{\mathrm{AP}}\right|^2+\left|\overrightarrow{\mathrm{BP}}\right|^2+\left|\overrightarrow{\mathrm{CP}}\right|^2\\&=\left|\overrightarrow{\mathrm{AP}}\right|^2+\left|\overrightarrow{\mathrm{AP}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|^2+\left|\overrightarrow{\mathrm{AP}}-\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|^2\\&=3\left|\overrightarrow{\mathrm{AP}}\right|^2-2(\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}+\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|^2+\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|^2\\&=3\left|\overrightarrow{\mathrm{AP}}-\frac{1}{3}(\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}})\right|^2-\frac{1}{3}\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|^2+\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|^2+\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|^2\\&=3\left|\overrightarrow{\mathrm{AP}}-\frac{1}{3}(\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}})\right|^2+\frac{2}{3}\left(\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|^2-\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}+\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|^2\right)\end{aligned}$$

ここで，正三角形 ABC の外心は重心と一致するから，

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{AP}}-\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)\right|=r \quad (\text{外接円 } K \text{ の半径})$$

正弦定理より

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|=\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|=2r\sin 60^\circ=\sqrt{3}\,r$$

内積の定義より

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|\cos 60^\circ=\frac{3}{2}r^2$$

以上まとめて

$$\mathrm{PA}^2+\mathrm{PB}^2+\mathrm{PC}^2=6r^2 \quad (\text{答})$$

(2) 定点 P を

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}+\overrightarrow{\mathrm{AD}}\right)$$

により定まる点とすれば，

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{AP}}\right|^2=\frac{1}{16}\left(\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|^2+\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|^2+\left|\overrightarrow{\mathrm{AD}}\right|^2+2\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}+2\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}+2\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}\right)$$

$$\begin{aligned}\left|\overrightarrow{\mathrm{BP}}\right|^2&=\frac{1}{16}\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}+\overrightarrow{\mathrm{AD}}-4\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|^2\\&=\frac{1}{16}\left(9\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|^2+\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|^2+\left|\overrightarrow{\mathrm{AD}}\right|^2-6\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}+2\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}-6\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}\right)\end{aligned}$$

ここで，$\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|=a$ とおくと，四面体 ABCD は正四面体であることより

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|=\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|=\left|\overrightarrow{\mathrm{AD}}\right|=a,\quad \overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\frac{1}{2}a^2$$

であるから，

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{AP}}\right|^2=\left|\overrightarrow{\mathrm{BP}}\right|^2=\frac{3}{8}a^2 \quad \text{同様に} \quad \left|\overrightarrow{\mathrm{CP}}\right|^2=\left|\overrightarrow{\mathrm{DP}}\right|^2=\frac{3}{8}a^2$$

となって，点 P は正四面体 ABCD の外接球面の中心 Q である。 (おわり)